Henri Lepeu

Terminale spécialité Mathématiques expertes
M. Bérard

# Colle S03

25/09/25

## 1 Démonstration

Démontrer la proposition suivante :

**Proposition 1 – Propriété (caractérisation de la fonction réciproque)**

Si $f : E \to F$ est une application, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

**1.** $f$ est bijective de $E$ sur $F$ ;

**2.** Il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

De plus, si lune des conditions est vérifiée, la fonction $g$ est unique et est appelée *fonction réciproque de* $f$, notée $f^{-1}$.

## 2 Exercices

### 2.1 Bijection réciproque

Soit $E$ un ensemble, et $A$, $B$ deux sous-ensembles de $E$. On considère l'application

$$f \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$$

**1.** Montrer que $f$ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

**2.** Montrer que $f$ est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

**3.** Dans le cas où $f$ est bijective, déterminer son application réciproque.

### 2.2 Divisibilité d'un polynôme de degré $n$

Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls et $x$ un entier relatif.

**1.** Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.

$(i)$ $p \mid x^2 - x$,

— $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p \mid x^n - x$.

**2.** En déduire l'ensemble des entiers relatifs 0 tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier $x^n - x$ est pair.

Corentin Poisblaud

Terminale spécialité Mathématiques expertes
M. Bérard

# Colle S03

25/09/25

## 1 Démonstration

Démontrer la proposition suivante :

**Proposition 1**

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications.

**1.** Si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective.

**2.** Si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective.

## 2 Exercices

### 2.1 Bijection réciproque

Soit $E$ et $F$ deux ensembles, et $f$ une application de $E$ vers $F$. On considère les applications :

$$\phi \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \right.$$

et

$$\psi \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array} \right.$$

**1.** Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- **a)** $f$ est injective
- **b)** $\phi$ est injective
- **c)** $\psi$ est surjective

**2.** Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- **a)** $f$ est surjective
- **b)** $\phi$ est surjective
- **c)** $\psi$ est injective

### 2.2 Division euclidienne d'un polynôme

Pour tout entier $x \in \mathbb{N}^*$, nous posons :

$$p(x) = \left[x^2 + (x-1)^2\right]^2.$$

Quel est le reste de la division euclidienne de $p(x)$ par $4x^2$ ?