Grégoire LE BARBER

Terminale spécialité Mathématiques expertes
M. BÉRARD

Colle S04

02/10/25

1 Démonstration

Démontrer la proposition suivante :

Proposition 1

L'application

$$u \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E,\{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$$

est une bijection.

2 Exercices

2.1 Encore des applications

Soit E et F deux ensembles, et f une application de E vers F. On considère les applications :

$$\phi \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \right.$$

et

$$\psi \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array} \right.$$

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   - **a)** f est injective
   - **b)** ϕ est injective
   - **c)** ψ est surjective

2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   - **a)** f est surjective
   - **b)** ϕ est surjective
   - **c)** ψ est injective

2.2 Familles indexées

Pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $J_h =]-h,h[$. Montrer que :

$$\bigcap_{h \in \mathbb{R}_+^*} J_h = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{k \in \mathbb{R}_+^*} J_h = \mathbb{R}.$$

Jean Butlen

Terminale spécialité Mathématiques expertes
M. Bérard

Colle S04

02/10/25

1 Démonstration

Démontrer la proposition suivante puis les **Lois de De Morgan** :

Proposition 1 – Caractérisation de la fonction réciproque

Si $f : E \to F$ est une application, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective de E sur F ;

2. Il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

De plus, si lune des conditions est vérifiée, la fonction g est unique et est appelée *fonction réciproque de f*, notée f^{-1}.

2 Exercices

2.1 Fonction caractéristique

Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E.

1. Rappeler les fonctions caractéristiques de $\overline{A}$, $A \cap B$, $A \cup B$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

2. Retrouver, à l'aide des fonctions indicatrices, que $A \cap B = A \cup B \iff A = B$.

2.2 Injection, surjection, bijection

Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On considère l'application

$$f \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

3. Dans le cas où f est bijective, déterminer son application réciproque.