Jean Butlen

Terminale spécialité Mathématiques expertes
M. Bérard

Colle S06

15/10/25

1 Démonstration

Démontrer la proposition suivante :

Proposition 1

Étant donné une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur un ensemble E, ainsi que deux éléments x et y de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i)\ x\mathscr{R}y \qquad (ii)\ y \in \widetilde{x} \qquad (iii)\ \widetilde{x} = \widetilde{y}.$$

2 Exercices

2.1 Bornes supérieures et inférieures

1. Soit $A = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

   a) Montrer que A est majoré et minoré dans $\mathbb{R}$.

   b) Déterminer $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

2. Soit $B = \left\{ (-1)^n + \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

   a) Discuter les bornes supérieures et inférieures de B.

   b) Déterminer si B admet un maximum ou un minimum.

2.2 Bijection, congruences et relations

Soit $E = \mathbb{Z}$ et la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ définie par $f(x) = \tilde{x}$.

1. Montrer que $x\mathscr{R}y \iff f(x) = f(y)$ définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

2. Déterminer les classes d'équivalence et l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/$.

3. Montrer que f induit une bijection entre $\mathbb{Z}/$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

4. Expliquer comment ce principe se généralise à tout entier $n \geq 2$.

Grégoire Le Barber Terminale spécialité Mathématiques expertes
M. Bérard

Colle S06

15/10/25

1 Démonstration

Démontrer la proposition suivante :

Proposition 1

Soit A une partie non vide d'un ensemble E totalement ordonné pour la relation $\preceq$. Pour qu'un élément S de E soit la borne supérieure de A dans E, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1. $\forall a \in A,\ a \preceq S$;
2. $\forall b \in E : b \prec S \implies \exists a \in A : b \prec a$.

2 Exercices

2.1 Congruences et ensembles quotients

On considère la relation $x \equiv y\ [6]$ dans $\mathbb{Z}$.

1. Donner les classes d'équivalence.
2. Montrer que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est une partition de $\mathbb{Z}$.
3. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $f(x) = \tilde{x}$. Montrer que f est surjective et que $\ker(f) = 6\mathbb{Z}$.
4. Interpréter ce résultat dans le cadre général des ensembles quotients.

2.2 Relations et exponentielle

On définit :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On notera ln la bijection réciproque de f.
2. On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la relation $a\mathscr{R}b \iff \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
3. Déterminer la relation $\mathscr{S}$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$x\mathscr{S}y \iff f(x)\mathscr{R}f(y).$$

4. Montrer que $\mathscr{S}$ est aussi une relation d'équivalence et décrire ses classes.