Jean Butlen

Terminale spécialité Mathématiques expertes
M. Bérard

Colle S08

12/11/25

1 Démonstration

Démontrer la proposition suivante :

Théorème 1 – Récurrence forte

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n.
Si

$$\begin{cases} \mathcal{P}(0) \text{ est vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}(n-1) \wedge \mathcal{P}(n)\big) \implies \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}$$

2 Exercices

2.1 Second degré modulo 11

1. Soit n un entier relatif. Déterminer les restes de la division euclidienne de n^2 par 11.

2. Nous considérons, dans $\mathbb{Z}$, l'équation

$$x^2 - 2px + q \equiv 0[11], \quad \text{avec } p,q \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Déterminer les restes de la division euclidienne de $p^2 - q$ par 11 afin que l'équation (1) admette un ensemble non vide de solutions.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation

$$x^2 + 3x + 4 \equiv 0[11]. \tag{2}$$

2.2 Somme des cubes

On pose, pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

1. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.

2. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Grégoire Le Barber

Colle S08

12/11/25

1 Démonstration

Démontrer le **Principe additif**, puis sa généralisation à n ensembles :

Proposition 1 – Cas général

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n ensembles finis disjoints deux à deux. Nous disposons de l'égalité

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Card} A_k.$$

2 Exercices

2.1 Des équations modulo n

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a) $x^2 - x + 3 \equiv 0\ [5]$,

b) $x^3 - 3x + 5 \equiv 0\ [7]$.

2. Pour tout entier relatif x, développer $(x+2)^4$ modulo 3.
En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation

$$x^4 - x^3 - x + 1 \equiv 0\ [3].$$

2.2 Récurrence

Soit un réel $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
On rappelle la formule suivante :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad 1 + \cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2\cos a \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de a et de n.

2. Démontrer par récurrence cette conjecture.