Lycée Saint Augustin — 2025–2026
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes — M. Berard

# MATHÉMATIQUES
## COMPOSITION TRIMESTRIELLE N° 1

**Mardi 18 Novembre 2025**
**Durée : 4 heures**
***Barème : 20 points***

# Révisions de 1ère. Récurrence. Combinatoire – Dénombrement.

D'après les sujets du Bac 2024

*Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, d'une part vous le signalez au surveillant, d'autre part vous le signalez sur votre copie et vous poursuivez la composition en indiquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.*
*L'élève est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
Calculatrice autorisée.

Indications :

- La présentation doit comporter le nom, la classe, la date, le numéro du devoir et un encadré pour les commentaires et la note. Vos résultats doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$.
- Composer sur **copies doubles grand carreaux uniquement**.
- À la fin d'un exercice, on **change de page** (ou de copie) obligatoirement.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part **importante** dans l'appréciation des copies.
- **En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.**

**Exercice 1** Combinatoire – Dénombrement *(5 points)*

#### Partie A

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher. À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.

Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus. Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est $(4; 5; 1)$.

**1.** Déterminer le nombre de tirages possibles.

**2.** **a)** Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.

**b)** En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

#### Partie B

Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale.

**3.** Elle veut former un groupe de 5 élèves. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe de 5 élèves ?

La professeure s'intéresse maintenant à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :

- 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie ;
- 20 élèves ont choisi la spécialité SES ;
- 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol.

**4.** Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe ?

#### Partie C

Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).

**5.** Combien existe-t-il de codes contenant au moins un 0 ?

**Exercice 2** Une suite récurrente non linéaire *(5 points)*

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par

$$g(x) = 2x - x^2.$$

**1.** Montrer que la fonction $g$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g\,(u_n) \end{cases}$$

2. Calculer $u_1$ et $u_2$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. *(Bonus +2 pts)* Montrer par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2^{2^n} - 1}{2^{2^n}}.$$

*Remarque : il s'agit d'une question difficile pour le niveau du Bac. En particulier, il faudra remarquer que, d'une part :*

$$2 \times 2^{2^n} = 2^{2^n} + 2^{2^n} = 2^{2^n+1},$$

*et d'autre part :*

$$2^{2^n} \times 2^{2^n} = 2^{2^{n+1}}.$$

5. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang $n$ à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```python
def seuil() :
    n=0
    u=0.5
    while u < 0.95 :
        n=...
        u=...
    return n
```

**Exercice 3** Nombre d'or *(5 points)*

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ :

$$f(x) - x = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}.$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

*Remarque : le nombre $\ell$ est appelé « Nombre d'or ».*

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel $n$, par $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.
On admet que la suite de terme général $u_n$ est bien définie pour tout entier naturel $n$.

**4.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

**Exercice 4** Encore une suite *(5 points)*

On considère la suite $(u_n)$ telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que $u_n$ est défini pour tout entier naturel $n$.

**1.** Calculer les valeurs exactes de $u_1$ et $u_2$.

Soit la fonction $f$ définie sur $]-3\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x-4}{x+3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

**2.** Démontrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur $]-3\ ;\ +\infty[$.

**3.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ :

$$-2 < u_{n+1} \leqslant u_n.$$

**4.** Soit la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

**a)** Donner $v_0$.

**b)** Démontrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique de raison 1.

**c)** En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ :

$$u_n = \frac{1}{n + 0{,}5} - 2.$$

**Exercice 5** Bonus — Si vous vous ennuyez *(+3 points)*

Pour tout entier naturel $n$ non nul, nous posons :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)$$

et

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (2k+1)$$

Calculer quelques uns des premiers termes de chaque suite jusqu'à pouvoir conjecturer les expressions de $S_n$ et $T_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ (sans symbole somme).

Démontrer ces conjectures.

*Bon courage.*