Lycée Saint Augustin
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes

2025–2026
M. Berard

MATHÉMATIQUES

CORRECTION DE LA COMPOSITION TRIMESTRIELLE N° 1

Mardi 18 Novembre 2025

Durée : 4 heures

Barème : 20 points

Révisions de 1ère. Récurrence. Combinatoire – Dénombrement.

D'après les sujets du Bac 2024

Exercice 1 Combinatoire – Dénombrement *(5 points)*

Partie A

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher. À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.

Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus. Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est $(4; 5; 1)$.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.

Un tirage est donc un triplet (c'est-à-dire une 3-liste ou un 3-uplet) ordonné d'éléments choisis dans un ensemble E de cardinal $\text{Card}(E) = 8$ (il y a 8 jetons), qui ne s'amenuise pas (car on remet le jeton avant de tirer le suivant, et donc les répétitions sont possibles).
Le nombre de tirages possibles est donc de :

$$\boxed{\text{Card}(E)^3 = 8^3 = 512.}$$

2. a) Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.

Si on souhaite un tirage sans répétition de numéro, alors, c'est comme si on avait fait un tirage sans remise (un numéro déjà choisi ne peut pas être choisi à nouveau), et donc un triplet ordonné d'éléments choisis dans un ensemble qui s'amenuise (ce qu'on appelle *arrangement*).
Il y a donc

$$\boxed{A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \times 7 \times 6 = 336}$$

tirages possibles sans numéro répété.
On peut aussi voir cette valeur comme étant : 8 choix possibles pour le premier numéro du triplet, puis 7 choix possibles pour le deuxième numéro, sachant qu'il doit être différent du premier et enfin 6 choix possibles pour le dernier numéro, qui doit être différent des deux précédents, et conclure à l'aide du principe multiplicatif.

b) En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

Le nombre de tirages avec au moins une répétition de numéro est donc la différence des deux résultats précédents :

$$\boxed{512 - 336 = 176.}$$

En effet, l'ensemble des tirages possibles est la réunion de deux ensembles disjoints : les tirages sans aucune répétition de numéro et les tirages avec au moins une répétition de numéro.

Partie B

Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale.

3. Elle veut former un groupe de 5 élèves. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe de 5 élèves ?

On veut choisir 5 élèves parmi les 31 élèves de la classe, ce qui correspond à

$$\boxed{\binom{31}{5} = 169\ 911}$$

possibilités.

La professeure s'intéresse maintenant à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :

— 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie ;

— 20 élèves ont choisi la spécialité SES ;

— 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol.

4. Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe ?

Elle choisit 3 élèves parmi les 20 faisant SES : elle a $\binom{20}{3}$ possibilités ; ensuite dans chacun de ces cas elle choisit 2 élèves parmi les $31 - 20 = 11$ élèves qui ne font pas SES, ce qui fait par principe multiplicatif

$$\boxed{\binom{20}{3} \times \binom{11}{2} = 62\ 700}$$

possibilités.

Partie C

Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).

5. Combien existe-t-il de codes contenant au moins un 0 ?

Il y a $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 3 \times 2 = 60\ 000$ codes possibles (10 valeurs possibles pour chacun des chiffres et 3 valeurs possibles pour la première lettre et deux valeurs possible pour la deuxième car elles doivent être distinctes).

Il y a $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 3 \times 2 = 39\ 366$ codes ne contenant pas de 0 (9 valeurs possibles pour chacun des chiffres et 3 valeurs possibles pour la première lettre et deux valeurs possible pour la deuxième car elles doivent être distinctes).

$\boxed{\text{Il y a donc } 60\ 000 - 39\ 366 = 20\ 634 \text{ codes contenant au moins un zéro.}}$

Exercice 2 Une suite récurrente non linéaire *(5 points)*

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale, donc est dérivable sur $[0\,;1]$ et donc :

$$\forall\, x \in [0\,;1], \quad g'(x) = 2 - 2x = 2(1-x).$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant 1 &\implies -x \leqslant 0 \leqslant 1 - x \\ &\implies 2(1-x) \geqslant 0 \\ &\implies g'(x) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, g' est positive sur $[0\,;1]$ et ne s'annule qu'en $x = 1$.

$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc strictement croissante de } g(0) = 0 \text{ à } g(1) = 2 - 1^2 = 1.}$

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g\left(u_n\right) \end{cases}$$

2. Calculer u_1 et u_2.

- $u_1 = 2 \times \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$;
- $u_2 = 2 \times \dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{24}{16} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{15}{16}$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

Soit $\mathscr{P}(n) : 0 < u_n < u_{n+1} < 1$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrons cette propriété par récurrence sur n.

Initialisation

On a $0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} < 1$, soit $0 < u_0 < u_1 < 1$: $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
Alors par stricte croissance sur $[0\,;1]$ de la fonction g, on a :

$$g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1),$$

ce qui implique par définition de la suite (u_n) :

$$0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1,$$

d'où $\mathscr{P}(n+1)$.

La propriété est héréditaire et vérifiée au rang $n = 0$. Par principe de récurrence, on a donc

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < u_{n+1} < 1.}$$

4. *(Bonus +2 pts)* **Montrer par récurrence que**

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2^{2^n} - 1}{2^{2^n}}.$$

Remarque : il s'agit d'une question difficile pour le niveau du Bac. En particulier, il faudra remarquer que, d'une part :

$$2 \times 2^{2^n} = 2^{2^n} + 2^{2^n} = 2^{2^n+1},$$

et d'autre part :

$$2^{2^n} \times 2^{2^n} = 2^{2^{n+1}}.$$

Soit

$$\mathscr{P}(n) : u_n = \frac{2^{2^n} - 1}{2^{2^n}}$$

la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrons cette propriété par récurrence sur n.

Initialisation

On a

$$u_0 = \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{2^{2^0} - 1}{2^{2^0}}.$$

$\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie (HR).

On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= g(u_n) \\
&= 2u_n - {u_n}^2 \\
&= 2\frac{2^{2^n}-1}{2^{2^n}} - \left(\frac{2^{2^n}-1}{2^{2^n}}\right)^2 \qquad \textit{d'après } (\mathrm{HR}) \\
&= 2\frac{2^{2^n}-1}{2^{2^n}} - \frac{2^{2^n\times 2} - 2\times 2^{2^n} + 1}{2^{2^n\times 2}} \\
&= 2\frac{2^{2^n}(2^{2^n}-1)}{2^{2^n}\times 2^{2^n}} - \frac{2^{2^{n+1}} - 2^{2^n+1} + 1}{2^{2^{n+1}}} \\
&= \frac{2\times 2^{2^{n+1}} - 2\times 2^{2^n} - 2^{2^{n+1}} + 2^{2^n+1} - 1}{2^{2^{n+1}}} \\
&= \frac{2\times 2^{2^{n+1}} - 2^{2^n+1} - 2^{2^{n+1}} + 2^{2^n+1} - 1}{2^{2^{n+1}}} \\
&= \frac{2^{2^{n+1}}-1}{2^{2^{n+1}}},
\end{aligned}$$

d'où $\mathscr{P}(n+1)$.

La propriété est héréditaire et vérifiée au rang $n = 0$. Par principe de récurrence, on a donc

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2^{2^n}-1}{2^{2^n}}.}$$

5. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
def seuil() :
    n=0
    u=0.5
    while u < 0.95 :
        n=n+1
        u=2*u-u**2
    return n
```

Exercice 3 Nombre d'or *(5 points)*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

La fonction f est de la forme $\sqrt{u}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} u(x) = x+1 \\ u'(x) = 1 \end{cases}$$

On a donc $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in [0\,;+\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

La fonction racine carrée étant à valeurs positives, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$, donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ \ +\infty[$.

2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in [0\,;+\infty[, \quad f(x) - x &= \sqrt{x+1} - x \\ &= \frac{\left(\sqrt{x+1}-x\right)\left(\sqrt{x+1}+x\right)}{\sqrt{x+1}+x} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x+1}+x} \\ &= \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}. \end{aligned}$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Remarque : le nombre ℓ est appelé « Nombre d'or ».

On a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x} = 0 \\ &\iff -x^2+x+1 = 0 \quad \textit{car le dénominateur ne} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{s'annule pas sur } \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant du polynôme $-x^2+x+1$. On a :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5.$$

On a donc deux racines réelles distinctes :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \geqslant 0 \\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{-2} < 0 \quad \textit{donc n'est pas solution de l'équation sur } [0\,;+\infty[\end{cases}$$

L'équation $f(x) = x$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$:

$$\boxed{\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.}$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Soit la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathscr{P}(n)$: $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
Montrons cette propriété par récurrence sur n.

Initialisation
On a :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \geqslant 1 \\ u_1 = g(u_0) = \sqrt{5+1} = \sqrt{6} \leqslant 5 = u_0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$1 \leqslant u_1 \leqslant u_0,$$

d'où $\mathscr{P}(0)$.

Hérédité
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. On a donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
En appliquant la fonction f aux trois membres de cette inégalité, la croissance de f sur $[0\,;+\infty[$ donne :

$$
\begin{aligned}
f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) &\implies \sqrt{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \\
&\implies 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \quad \textit{car } \sqrt{2} \geqslant 1
\end{aligned}
$$

d'où $\mathscr{P}(n+1)$.

L'inégalité est vraie au rang 0, et sa véracité est héréditaire. Par principe de récurrence, on a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.}$$

Exercice 4 Encore une suite *(5 points)*

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

- $u_1 = \dfrac{-u_0 - 4}{u_0 + 3} = \dfrac{0 - 4}{0 + 3} = -\dfrac{4}{3}$
- $u_2 = \dfrac{-u_1 - 4}{u_1 + 3} = \dfrac{-\left(-\frac{4}{3}\right) - 4}{-\frac{4}{3} + 3} = \dfrac{\frac{4}{3} - \frac{12}{3}}{-\frac{4}{3} + \frac{9}{3}} = \dfrac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = -\dfrac{8}{5}$

Soit la fonction f définie sur $]-3\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x - 4}{x + 3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $]-3\ ;\ +\infty[$.

f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition, à savoir $]-3\,;+\infty[$.
Pour tout $x \in]-3\,;+\infty[$, on a :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-1(x+3) - (-x-4) \times 1}{(x+3)^2} \\
&= \frac{-x - 3 + x + 4}{(x+3)^2} \\
&= \frac{1}{(x+3)^2} > 0,
\end{aligned}
$$

donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]-3\,;+\infty[.}$

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-2 < u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathscr{P}_n$: $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$. Démontrons-la par récurrence.

Initialisation

On a $u_0 = 0$ et $u_1 = -\dfrac{4}{3}$, ce qui donne :

$$-2 < u_1 \leqslant u_0.$$

Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie (HR).
Comme $-3 < -2$ et que $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$, on se place dans l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$. Sur cet intervalle, la fonction f est strictement croissante, donc :

$$-2 < u_{n+1} \leqslant u_n \implies f(-2) < f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$$

Or $f(-2) = \dfrac{-(-2)-4}{-2+3} = -2$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$.
Ainsi :

$$-2 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1},$$

d'où $\mathscr{P}(n+1)$.
La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire. Par principe de récurrence, on a donc :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad -2 < u_{n+1} \leqslant u_n.}$$

4. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

a) Donner v_0.

On a $v_0 = \dfrac{1}{u_0+2} = \dfrac{1}{0+2} = \dfrac{1}{2}$.

b) **Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il vient :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}+2} \\ &= \frac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+2} \\ &= \frac{1}{\frac{-u_n-4+2u_n+6}{u_n+3}} \\ &= \frac{u_n+3}{u_n+2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$v_{n+1}-v_n = \frac{u_n+3}{u_n+2} - \frac{1}{u_n+2} = \frac{u_n+2}{u_n+2} = 1.$$

Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $r=1$ et de premier terme $v_0 = 0{,}5$.

c) **En déduire que pour tout entier naturel** $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{1}{n+0{,}5} - 2.$$

La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 0{,}5$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr = 0{,}5 + n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{u_n+2} &\iff \frac{1}{v_n} = u_n + 2 \\ &\iff u_n = \frac{1}{v_n} - 2 = \frac{1}{n+0{,}5} - 2. \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{n+0{,}5} - 2.}$$

Exercice 5 Bonus Si vous vous ennuyez *(+3 points)*

Pour tout entier naturel n non nul, nous posons :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)$$

et

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (2k+1)$$

Calculer quelques uns des premiers termes de chaque suite jusqu'à pouvoir conjecturer les expressions de S_n et T_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ (sans symbole somme).

Démontrer ces conjectures.

Sur la calculatrice, on obtient :

$$\begin{array}{rl} S_1 = 1 & T_1 = 1 \\ S_2 = 4 & T_2 = -2 \\ S_3 = 9 & T_3 = 3 \\ S_4 = 16 & T_4 = -4 \\ S_5 = 25 & T_5 = 5 \\ S_6 = 36 & T_6 = -6 \\ & \vdots \end{array}$$

À la lecture des 6 premières valeurs de S_n et T_n, nous pouvons conjecturer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = n^2$$
$$T_n = (-1)^{n-1} n$$

▷ Nous justifions par récurrence la première égalité.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Initialisation $S_1 = 1 = 1^2$. L'égalité proposée est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité Nous supposons qu'à un rang fixé $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2.$$

Montrons que : $S_{n+1} = (n+1)^2$.
Nous avons, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$S_{n+1} = S_n + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

ce qui montre que l'égalité proposée est encore vraie au rang $n+1$.
En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2.$$

▷ Nous justifions par récurrence la seconde égalité,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (2k+1) = (-1)^{n-1} n.$$

Initialisation $T_1 = 1 = (-1)^0 \times 1$. L'égalité proposée est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité Nous supposons qu'à un rang fixé $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (2k+1) = (-1)^{n-1} n.$$

Montrons que : $T_{n+1} = (-1)^n (n+1)$.
En remarquant que $(-1)^n = (-1)^{n-1} \times (-1)$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= T_n + (-1)^n (2n+1) \\ &= (-1)^{n-1} n + (-1)^n (2n+1) \\ &= (-1)^{n-1} \times (-1) \times (-n) + (-1)^n (2n+1) \\ &= (-1)^n (-n + 2n + 1) \\ &= (-1)^n (n+1) \end{aligned}$$

ce qui montre que l'égalité attendue est vraie au rang $n+1$.
En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (2k+1) = (-1)^{n-1} n.$$