Lycée Saint Augustin
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes

2025–2026
M. BERARD

MATHÉMATIQUES

DEVOIR MAISON N° 1

À rendre le Jeudi 25 Septembre 2025

Durée indicative : 6 heures

Barème : 30 (35 ME) points

RÉVISIONS. LOGIQUE ET ENSEMBLES

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et vous poursuivez la composition en indiquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
L'élève est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

INDICATIONS :

- La présentation doit comporter le nom, la classe, la date, le numéro du devoir et un encadré pour les commentaires et la note. Vos résultats doivent être encadrés.
- Composer sur copies doubles uniquement.
- À la fin d'un exercice, on change de page (ou de copie) obligatoirement.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

1 Révisions de Première

Exercice 1 QCM *(5 points)*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Relevez sur votre copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

QUESTION 1

Quelle est la forme factorisée de $f(x) = 0{,}5(x-2)^2 - 8$?

a. $0{,}5x^2 - 2x - 6$	**b.** $0{,}5(x+10)(x-6)$
c. $0{,}5(x-6)(x+2)$	**d.** $0{,}5(x-10)(x+6)$

QUESTION 2

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0{,}5$ telle que $u_{10} = -4$. Quelle est la valeur du terme u_2 ?

a. 8	**b.** 0	**c.** -10	**d.** -8

QUESTION 3

Soit la fonction f définie pour tout $x \neq -2$ par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$.

Parmi les expressions suivantes, laquelle définit la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$?

a. $f'(x) = -\dfrac{5}{(x+2)^2}$	**b.** $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$	**c.** $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$	**d.** $f'(x) = 2$

QUESTION 4

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Laquelle de ces équations est une équation cartésienne de la droite Δ, de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et passant par le point $\mathrm{A}(-1\ ;\ 3)$?

a. $2x - y + 1 = 0$	**b.** $x + 2y + 1 = 0$	**c.** $-x + 2y - 7 = 0$	**d.** $-2x - y + 1 = 0$

QUESTION 5

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Parmi ces propositions, quelle est l'équation cartésienne du cercle de centre $\mathrm{A}(2\,;\,4)$ et de rayon 3 ?

a. $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 3$	**b.** $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 9$
c. $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$	**d.** $x^2 + y^2 + 11 = 0$

Exercice 2 *(5 points)*

Aujourd'hui, les chardons (une plante vivace) ont envahi 300 m^2 des champs d'une région. Chaque semaine, la surface envahie augmente de 5 % par le développement des racines, auquel s'ajoutent 15 m^2 suite à la dissémination des graines.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la surface envahie par les chardons, en m^2, après n semaines ; on a donc $u_0 = 300$ m^2.

1. **a)** Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer que la suite (u_n) ainsi définie, n'est ni arithmétique ni géométrique.

On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 15$.

2. On considère la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n + 300$.

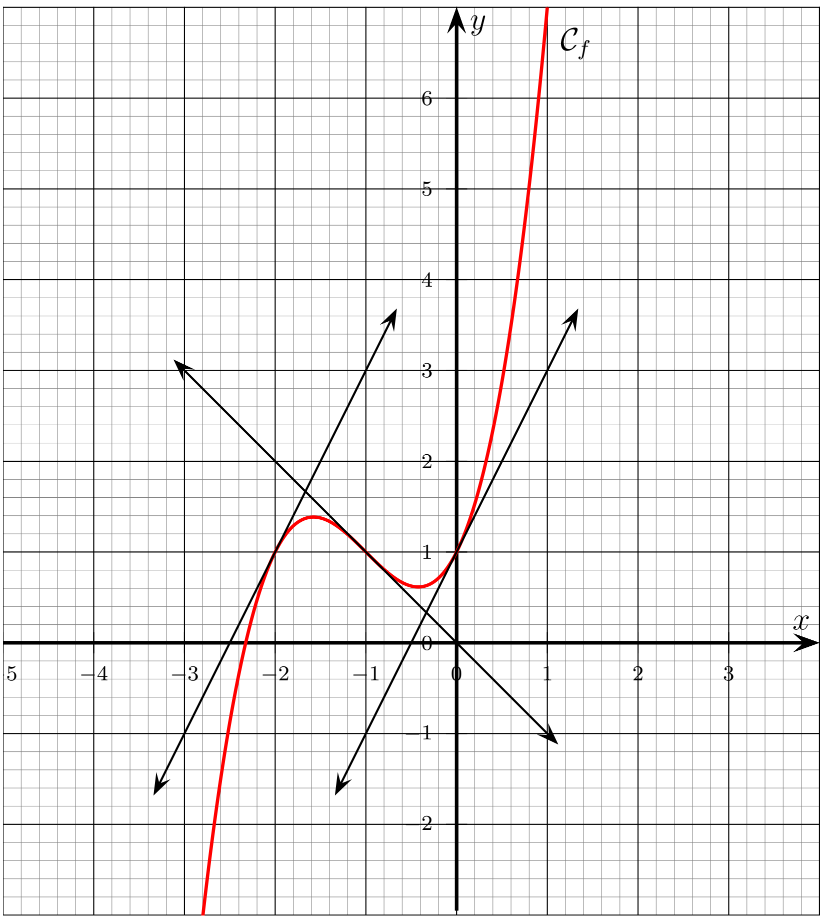
a) Calculer v_0, puis montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}05$.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que $u_n = 600 \times 1{,}05^n - 300$.

3. Est-il correct d'affirmer que la surface envahie par les chardons aura doublé au bout de 8 semaines ? Justifier la réponse.

Exercice 3 *(5 points)*

Dans la figure ci-dessous, on a tracé $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -2, -1 et 0.



1. Recopier sur la copie en le complétant le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-1	0
$f(x)$		
$f'(x)$		

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

2. **a)** Calculer $f'(x)$, pour tout réel x.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f'(x) = 0$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Le point $\mathrm{S}(-4\ ;\ -3)$ appartient-il à la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = -2$?

Exercice 4 *(5 points)*

Une étude statistique menée lors des entraînements montre que, pour un tir au but, Karim marque avec une probabilité de 0,7.

Karim effectue une série de 3 tirs au but. Les deux issues possibles après chaque tir sont les évènements :

- M : « Karim marque un but » ;
- R : « Karim rate le tir au but ».

On admet que les tirs au but de Karim sont indépendants.

1. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre total de buts marqués à l'issue de cette série de tirs par Karim.

a) Réaliser un arbre pondéré permettant de décrire toutes les issues possibles.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.

2. On propose à un spectateur le jeu suivant : il mise 15 € avant la série de tirs au but de Karim ; chaque but marqué par Karim lui rapporte 6 €, et chaque but manqué par Karim ne lui rapporte rien.

On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique du spectateur, c'est-à-dire la différence entre le gain total obtenu et la mise engagée.

a) Exprimer Y en fonction de X.

b) Calculer l'espérance $E(Y)$ de la variable aléatoire Y.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

2 Logique et ensembles

Définition 1 – Partie entière

La *partie entière* d'un nombre réel x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
Notée $\lfloor x \rfloor$, elle est entièrement définie par :

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \end{cases}$$

Exercice 5 Parties entières *(6 points)*

On cherche à résoudre l'équation d'inconnue $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\lfloor \frac{1}{2}a \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3}a \right\rfloor = a.$$

1. Soit a une solution de l'équation. À quel ensemble de nombres appartient nécessairement a ?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, donner l'encadrement caractérisant la partie entière x, notée $\lfloor x \rfloor$.
3. En déduire que $a \in [0{,}11]$.
4. Conclure.

Exercice 6 Une mystérieuse fonction composée *(4 points)*

On cherche à trouver les fonctions f telles que :

$$\forall\, (x{,}y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y.$$

1. Trouver les fonctions affines solutions du problème.
2. Résoudre ce problème.

3 Pour les maths expertes seulement

Exercice 7 Une équation diophantienne *(5 points)*

Soit $p \in \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.
On se propose de résoudre dans $(\mathbb{Z}^*)^2$ l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}. \qquad (E)$$

1. Donner les diviseurs de p^2.
2. Justifier que, si $(x{,}y) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ vérifie (E), alors $x - p | p^2$ et $y - p | p^2$.
3. En déduire l'ensemble $\mathcal{S}_{(E)}$ des couples solutions de (E).

Bon courage.