Lycée Saint Augustin 2025–2026
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes M. Berard

MATHÉMATIQUES

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 1

À rendre le Jeudi 25 Septembre 2025

Durée indicative : 6 heures

Barème : 30 (35 ME) points

Révisions. Logique et ensembles

1 Révisions de Première

Exercice 1 QCM *(5 points)*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Relevez sur votre copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

QUESTION 1

Quelle est la forme factorisée de $f(x) = 0{,}5(x-2)^2 - 8$?

a. $0{,}5x^2 - 2x - 6$	**b.** $0{,}5(x+10)(x-6)$
c. $0{,}5(x-6)(x+2)$	**d.** $0{,}5(x-10)(x+6)$

QUESTION 2

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0{,}5$ telle que $u_{10} = -4$. Quelle est la valeur du terme u_2 ?

a. 8	**b.** 0	**c.** -10	**d.** -8

QUESTION 3

Soit la fonction f définie pour tout $x \neq -2$ par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$.

Parmi les expressions suivantes, laquelle définit la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$?

a. $f'(x) = -\dfrac{5}{(x+2)^2}$	**b.** $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$	**c.** $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$	**d.** $f'(x) = 2$

QUESTION 4

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Laquelle de ces équations est une équation cartésienne de la droite Δ, de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(-1\ ;\ 3)$?

a. $2x - y + 1 = 0$	**b.** $x + 2y + 1 = 0$	**c.** $-x + 2y - 7 = 0$	**d.** $-2x - y + 1 = 0$

QUESTION 5

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Parmi ces propositions, quelle est l'équation cartésienne du cercle de centre $A(2\,;\,4)$ et de rayon 3 ?

a. $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 3$	**b.** $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 9$
c. $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$	**d.** $x^2 + y^2 + 11 = 0$

Exercice 2 *(5 points)*

Aujourd'hui, les chardons (une plante vivace) ont envahi 300 m^2 des champs d'une région. Chaque semaine, la surface envahie augmente de 5 % par le développement des racines, auquel s'ajoutent 15 m^2 suite à la dissémination des graines.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la surface envahie par les chardons, en m^2, après n semaines ; on a donc $u_0 = 300\ \text{m}^2$.

1. a) Calculer u_1 et u_2.

$$\begin{aligned} u_1 &= 1{,}05u_0 + 15 \\ &= 1{,}05 \times 300 + 15 \\ &= 330\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= 1{,}05u_1 + 15 \\ &= 1{,}05 \times 330 + 15 \\ &= 361{,}5\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

b) Montrer que la suite (u_n) ainsi définie, n'est ni arithmétique ni géométrique.

Pour passer de la semaine n à la semaine $n+1$, on ajoute une quantité (15 m^2) et on ajoute également 5 % de la surface de la semaine n, soit $0{,}05u_n$. Il ne s'agit donc ni d'une suite arithmétique (on ajoute une quantité égale pour passer d'un rang à un autre), ni d'une suite géométrique (on multiplie par une quantité égale).

On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 15$.

2. On considère la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n + 300$.

a) Calculer v_0, puis montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}05$.

Calculons v_0 :

$$v_0 = u_0 + 300 = 600\ \text{m}^2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 300 \\ &= 1{,}05u_n + 15 + 300 \\ &= 1{,}05u_n + 315 \\ &= 1{,}05(u_n + 300) \\ &= 1{,}05v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 1{,}05$.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que $u_n = 600 \times 1{,}05^n - 300$.

Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}05$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 q^n \\ &= 600 \times 1{,}05^n \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - 300$. D'où :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 600 \times 1{,}05^n - 300.}$$

3. Est-il correct d'affirmer que la surface envahie par les chardons aura doublé au bout de 8 semaines ? Justifier la réponse.

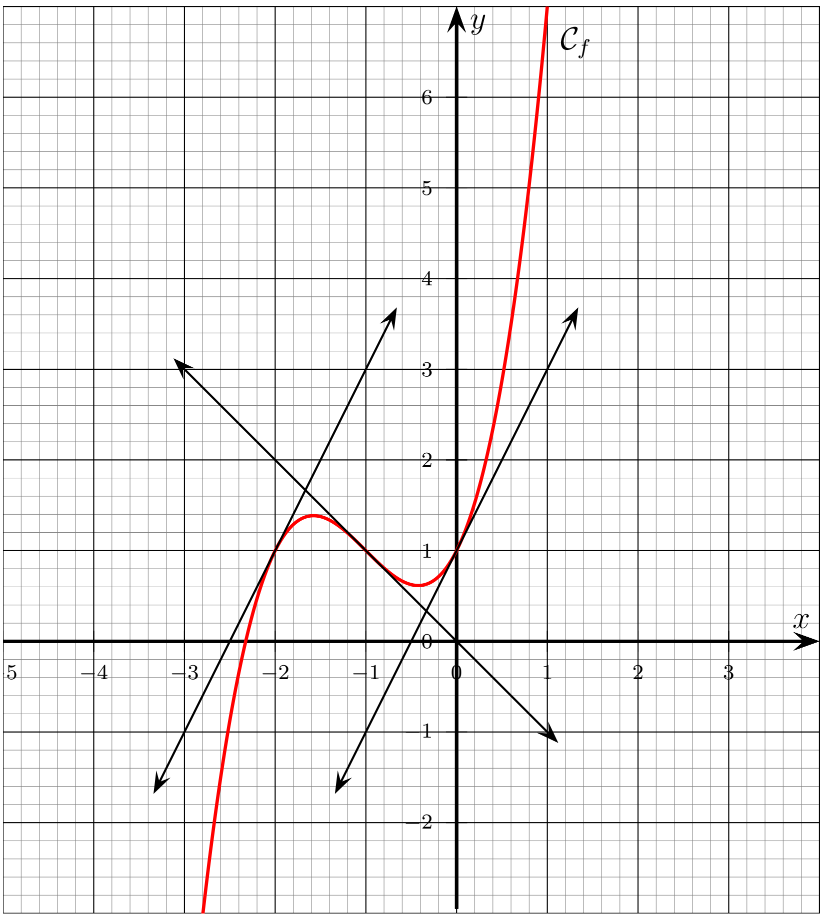
La surface envahie par les chardons au bout de 8 semaines est donnée par :

$$u_8 = 600 \times 1{,}05^8 - 300 \simeq 586{,}5 \text{ m}^2$$

La surface initiale étant de 300 m^2, elle n'aura pas doublé mais cela ne saurait tarder !

Exercice 3 *(5 points)*

Dans la figure ci-dessous, on a tracé $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -2, -1 et 0.



1. Recopier sur la copie en le complétant le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-1	0
$f(x)$	1	1
$f'(x)$	-1	2

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

2. a) Calculer $f'(x)$, pour tout réel x.

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 + 6x + 2.}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f'(x) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 3\left(x+1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) &= 3(x+1)^2 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\ &= 3x^2 + 6x + 3 - 3 \times \frac{3}{9} \\ &= 3x^2 + 6x + 2 \end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit :

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x + 2 = 0 &\iff 3\left(x+1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0 \\ &\iff x \in \left\{-1-\frac{\sqrt{3}}{3}, -1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right\} \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $f'(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$ est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-1-\frac{\sqrt{3}}{3}, -1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}.}$$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

On note x_- et x_+ les deux solutions de l'équation $f'(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$ telles que $x_- < x_+$. Le polynôme $3x^2 + 6x + 2$ étant de cœfficient dominant positif, f' est donc négative entre x_-0 et x_+ et positive en dehors. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		x_-		x_+		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_-)$	$\searrow$	$f(x_+)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. **Le point** $\mathrm{S}(-4\ ;\ -3)$ **appartient-il à la tangente à la courbe représentative de** f **au point d'abscisse** $x = -2$ **?**

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = -2$ est :

$$\begin{aligned} y &= f'(-2)(x+2) + f(-2) \\ &= 2(x+2) + 1 \\ &= 2x + 5 \end{aligned}$$

Comme $2 \times (-4) + 5 = -3$, le point $\mathrm{S}(-4\ ;\ -3)$ appartient donc bien à la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = -2$.

Exercice 4 *(5 points)*

Une étude statistique menée lors des entraînements montre que, pour un tir au but, Karim marque avec une probabilité de 0,7.

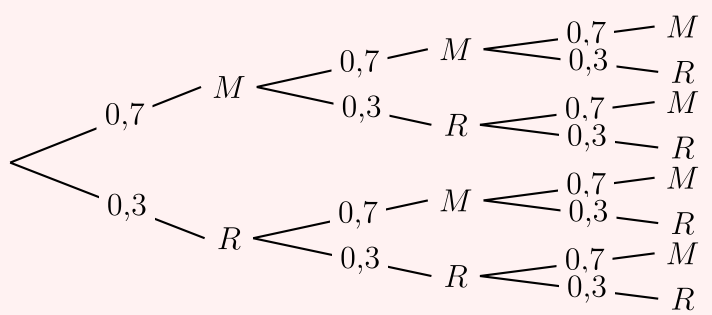
Karim effectue une série de 3 tirs au but. Les deux issues possibles après chaque tir sont les évènements :

- M : « Karim marque un but » ;
- R : « Karim rate le tir au but ».

On admet que les tirs au but de Karim sont indépendants.

1. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre total de buts marqués à l'issue de cette série de tirs par Karim.

   a) **Réaliser un arbre pondéré permettant de décrire toutes les issues possibles.**



b) Déterminer la loi de probabilité de X.

D'après l'arbre précédent :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X=0)=0{,}3^3=0{,}027\\
&\mathbb{P}(X=1)=3\times 0{,}3^2\times 0{,}7=0{,}189\\
&\mathbb{P}(X=2)=3\times 0{,}3\times 0{,}7^2=0{,}441\\
&\mathbb{P}(X=3)=0{,}7^3=0{,}343
\end{aligned}$$

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x_i)$	0,027	0,189	0,441	0,343

c) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X)&=\sum_{i=0}^{3}x_i\mathbb{P}(X=x_i)\\
&=0\times 00271\times 0{,}189+2\times 0{,}441+3\times 0{,}343\\
&=2{,}1
\end{aligned}$$

L'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X est :

$$\boxed{\mathbb{E}(X)=2{,}1\text{ buts.}}$$

2. On propose à un spectateur le jeu suivant : il mise 15 € avant la série de tirs au but de Karim ; chaque but marqué par Karim lui rapporte 6 €, et chaque but manqué par Karim ne lui rapporte rien.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique du spectateur, c'est-à-dire la différence entre le gain total obtenu et la mise engagée.

a) Exprimer Y en fonction de X.

On a :

$$\boxed{Y=6X-15.}$$

b) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ de la variable aléatoire Y.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y)&=\mathbb{E}(6X-15)\\
&=6\mathbb{E}(X)-15\\
&=6\times 2{,}1-15\\
&=-2{,}4\text{ €.}
\end{aligned}$$

En moyenne, le spectateur va perdre 2,4 € en jouant à ce jeu.

2 Logique et ensembles

Définition 1 – Partie entière

La *partie entière* d'un nombre réel x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
Notée $\lfloor x \rfloor$, elle est entièrement définie par :

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \end{cases}$$

Exercice 5 Parties entières *(6 points)*

On cherche à résoudre l'équation d'inconnue $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\lfloor \frac{1}{2}a \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3}a \right\rfloor = a.$$

1. **Soit a une solution de l'équation. À quel ensemble de nombres appartient nécessairement a ?**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, d'où :

$$a = \left\lfloor \frac{1}{2}a \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3}a \right\rfloor \in \mathbb{Z}.$$

2. **Soit $x \in \mathbb{R}$, donner l'encadrement caractérisant la partie entière x, notée $\lfloor x \rfloor$.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \iff \lfloor x \rfloor - 1 \leqslant x - 1 < \lfloor x \rfloor$$

Ainsi, en combinant les deux inéquations :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

3. **En déduire que $a \in [0,11]$.**

D'une part, nous avons d'après l'inégalité précédente :

$$\frac{1}{2}a - 1 < \left\lfloor \frac{1}{2}a \right\rfloor \leqslant \frac{1}{2}a.$$

D'autre part :

$$\frac{2}{3}a - 1 < \left\lfloor \frac{2}{3}a \right\rfloor \leqslant \frac{2}{3}a.$$

En additionnant terme à terme ces deux inégalités, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}a-2<a\leqslant\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}a &\iff \frac{7}{6}a-2<a\leqslant\frac{7}{6}a\\ &\iff -2<-\frac{1}{6}a\leqslant 0\\ &\iff 0\leqslant a<12.\end{aligned}$$

Or $a\in\mathbb{Z}$, donc $a\in\mathbb{Z}\cap[0,12[=[\![0,11]\!]$.

4. Conclure.

L'ensemble $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ des solutions de l'équation

$$\left\lfloor\frac{1}{2}a\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{3}a\right\rfloor=a.$$

est

$$\mathcal{S}=[\![0,11]\!].$$

Exercice 6 Une mystérieuse fonction composée *(4 points)*

On cherche à trouver les fonctions f telles que :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x-f(y))=2-x-y.$$

1. Trouver les fonctions affines solutions du problème.

Soit f une fonction affine. Il existe donc $a,b\in\mathbb{R}$ tels que

$$\forall\,x\in\mathbb{R},\quad f(x)=ax+b.$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Nous avons

$$\begin{aligned}f(x-f(y))&=f(x-ay-b)\\&=a(x-ay-b)+b\\&=ax-a^2y+b-ab\end{aligned}$$

Si f vérifie l'équation $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x-f(y))=2-x-y$, on a donc, par identification :

$$\begin{aligned}\begin{cases}a&=&-1\\ b-ab&=&2\end{cases} &\iff \begin{cases}a&=&-1\\ 2b&=&2\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}a&=&-1\\ b&=&1\end{cases}\end{aligned}$$

Réciproquement, on constate que la fonction $f:x\longmapsto 1-x$ vérifie bien :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x-f(y))=2-x-y.$$

L'ensemble des fonctions affines solutions du problème est donc

$$\{f : x \longmapsto 1 - x\}.$$

2. Résoudre ce problème.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y.$$

Soit $y \in \mathbb{R}$. En prenant $x = f(y)$, il vient

$$f(0) = 2 - f(y) - y = \text{constante},$$

ce qui signifie

$$\exists\, c \in \mathbb{R}, \quad f(y) = -y + c.$$

Nous déduisons donc que f est une fonction affine. Les solutions du problèmes sont donc les fonction affines solutions du problème, ce qui a été traité à la question précédente. Ainsi, l'ensemble des solutions du problème est donc

$$\{f : x \longmapsto 1 - x\}.$$

3 Pour les maths expertes seulement

Exercice 7 Une équation diophantienne *(5 points)*

Soit $p \in \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.
On se propose de résoudre dans $(\mathbb{Z}^*)^2$ l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}. \tag{E}$$

1. Donner les diviseurs de p^2.

Puisque p est premier, les diviseurs de p^2 dans $\mathbb{Z}$ sont

$$\boxed{\mathrm{Div}(p^2) = \{-1, -p, -p^2, 1, p, p^2\}.}$$

2. Justifier que, si $(x,y) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ vérifie (E), alors $x - p | p^2$ et $y - p | p^2$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
(E) \iff & \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{p} \\
\iff & p(x+y) = xy \\
\iff & xy - px - py = 0 \\
\iff & x(y-p) - py + p^2 - p^2 = 0 \\
\iff & x(y-p) - p(y-p) = p^2 \\
\iff & (x-p)(y-p) = p^2.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que si (x,y) est un couple de solutions entières de (E), alors $x-p$ et $y-p$ sont des diviseurs de p^2.

3. En déduire l'ensemble $\mathcal{S}_{(E)}$ des couples solutions de (E).

Il en résulte, par disjonction, les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x-p & = & -1 \\ y-p & = & -p^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-p & = & -p \\ y-p & = & -p \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-p & = & -p^2 \\ y-p & = & -1 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} x-p & = & 1 \\ y-p & = & p^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-p & = & p \\ y-p & = & p \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-p & = & p^2 \\ y-p & = & 1 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x & = & p-1 \\ y & = & p-p^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x & = & p-p^2 \\ y & = & p-1 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} x & = & p+1 \\ y & = & p+p^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y & = & 2p \\ y & = & 2p \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x & = & p+p^2 \\ y & = & p+1 \end{cases}$$

La solution $(0,0)$ ne convient pas car $(x,y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$. Réciproquement, nous vérifions que les cinq autres couples obtenus vérifient l'équation (E).
Nous en concluons que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ \left(p-1, p-p^2\right), \left(p-p^2, p-1\right), \left(p+1, p+p^2\right), (2p,2p), \left(p+p^2, p+1\right) \right\}.}$$