Lycée Saint Augustin — 2025–2026

Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes — M. Berard

MATHÉMATIQUES

DEVOIR MAISON N° 2

À rendre le Jeudi 9 Octobre 2025

Durée indicative : 8 heures

Barème : 44 (58 ME) points

Raisonnements. Relations et structures. Arithmétique.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et vous poursuivez la composition en indiquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

L'élève est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Indications :

- La présentation doit comporter le nom, la classe, la date, le numéro du devoir et un encadré pour les commentaires et la note. Vos résultats doivent être encadrés.
- Composer sur copies doubles grand carreaux uniquement.
- À la fin d'un exercice, on change de page (ou de copie) obligatoirement.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

1 Raisonnements

Exercice 1 Équations *(6 points)*

1. Résoudre l'équation $x - 1 = \sqrt{x+1}$ d'inconnue x.
2. Résoudre l'équation $|x-1| \leqslant |2x|$.
3. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \leqslant \sqrt{n(n+1)} < n+1$. En déduire $\lfloor \sqrt{n(n+1)} \rfloor$.

Exercice 2 Quelques démonstrations *(12 points)*

1. Démontrer que le produit de deux fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$ est une fonction paire.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$.
3. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$.
4. Démontrer par contraposée l'assertion suivante :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \neq (-1,-1) \implies 1 + x + y + xy \neq 0.$$

Exercice 3 Bonus *(+5 points)*

On considère un réel x non nul et tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

2 Relations

Exercice 4 Ordre partiel ou ordre total ? *(6 points)*

On considère deux relations sur $\mathbb{N}^*$:

- $x \preceq_1 y \iff x \mid y$ (divisibilité),
- $x \preceq_2 y \iff x \leqslant y$ (ordre usuel).

1. Montrer que $\preceq_1$ et $\preceq_2$ sont des relations d'ordre.
2. Montrer que $\preceq_1$ est un ordre partiel non total et que $\preceq_2$ est un ordre total.

Exercice 5 Classes d'équivalence *(10 points)*

On considère la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$x \mathscr{R} y \iff x \equiv y\ [4].$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence et donner la partition associée.
3. Donner un représentant canonique de chaque classe.

Exercice 6 Relation d'ordre *(10 points)*

On définit une relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(x_1,y_1)\mathscr{R}(x_2,y_2) \iff (x_1 \leqslant x_2) \wedge (y_1 \leqslant y_2).$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est un ordre partiel.

2. Montrer que $\mathscr{R}$ n'est pas un ordre total.

3. Donner un exemple de sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel $\mathscr{R}$ devient un ordre total.

3 Arithmétique (ME uniquement)

Exercice 7 Division euclidienne et puissance *(6 points)*

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

Le quotient et le reste de la division euclidienne de $a-1$ par b sont respectivement $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0,b-1]\!]$.

Quel est le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} ?

Exercice 8 Diviseur d'un produit de p entiers consécutifs *(8 points)*

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Nous désignons par P_n le produit de p entiers consécutifs dont le premier facteur est n. Il vient

$$P_n = \prod_{k=0}^{p-1}(n+k).$$

En considérant deux cas concernant le reste de la division euclidienne de n par p, montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad p \mid P_n.$$

Bon courage.