Lycée Saint Augustin
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes

2025–2026
M. Berard

MATHÉMATIQUES

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 2

À rendre le Jeudi 9 Octobre 2025

Durée indicative : 8 heures

Barème : 44 (58 ME) points

Raisonnements. Relations et structures. Arithmétique.

1 Raisonnements

Exercice 1 Équations *(6 points)*

1. **Résoudre l'équation** $x-1=\sqrt{x+1}$ **d'inconnue** x**.**

Cette équation est définie sur $D=[-1,+\infty[$. En élevant au carré, on a :

$$\begin{aligned} x-1=\sqrt{x+1} &\implies (x-1)^2=x+1 \\ &\implies x^2-2x+1=x+1 \\ &\implies x^2-3x=0 \\ &\implies x(x-3)=0. \end{aligned}$$

Les solutions sont $x=0$ et $x=3$ mais il ne faut pas oublier de faire la synthèse comme on a raisonné par implication. Seul $x=3$ convient donc $\boxed{\mathcal{S}=\{3\}}$.

2. **Résoudre l'équation** $|x-1|\leqslant|2x|$**.**

On élève l'inégalité au carré, comme la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que toutes les quantités sont positives :

$$\begin{aligned} |x-1|\leqslant|2x| &\iff (x-1)^2\leqslant(2x)^2 \\ &\iff x^2-2x+1\leqslant 4x^2 \\ &\iff 0\leqslant 3x^2+2x-1 \end{aligned}$$

$x=-1$ est racine évidente donc en factorisant :

$$3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$$

et ce polynôme est positif à l'extérieur des racines. Donc

$$\boxed{\mathcal{S}=]-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right[.}$$

3. **Démontrer que :** $\forall n\in\mathbb{N},\ n\leqslant\sqrt{n(n+1)}<n+1$**. En déduire** $\lfloor\sqrt{n(n+1)}\rfloor$**.**

On élève l'inégalité au carré, comme la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que toutes les quantités sont positives :

$$\begin{aligned} \forall n\in\mathbb{N},\quad n\leqslant\sqrt{n(n+1)}<n+1 &\iff n^2\leqslant n(n+1)<(n+1)^2 \\ &\iff n^2\leqslant n^2+n<n^2+2n+1 \\ &\iff 0\leqslant n<2n+1. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est triviale, donc par équivalence la première l'est également. On a encadré $\sqrt{n(n+1)}$ entre deux entiers consécutifs donc $\boxed{\lfloor\sqrt{n(n+1)}\rfloor=n.}$

Exercice 2 Quelques démonstrations *(12 points)*

1. **Démontrer que le produit de deux fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$ est une fonction paire.**

Soit f et g deux fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x) \quad \text{et} \quad g(-x) = -g(x).$$

Notons $h = f \times g$ la fonction produit, alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(-x) &= f(-x)g(-x) \\ &= (-f(x))(-g(x)) \\ &= f(x)g(x) \\ &= h(x). \end{aligned}$$

Ainsi, le produit de deux fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$ est une fonction paire.

2. **Soit $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$.**

Par l'absurde, supposons que $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$. Alors :

$$\exists\, (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{x} = \frac{p}{q} \implies x = \frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{Q}.$$

C'est impossible car $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$, donc $\boxed{\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}.}$

3. **Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$.**

Élever l'inégalité au carré n'est pas une bonne idée, dans la mesure où on obtient un polynôme de degré 4 à gérer ensuite...
Si $x \geqslant 1$, l'inégalité devient :

$$\begin{aligned} x - 1 \leqslant x^2 - x + 1 &\iff 0 \leqslant x^2 - 2x + 2 \\ &\iff 0 \leqslant (x-1)^2 + 1. \end{aligned}$$

Si $x \leqslant 1$, l'inégalité devient :

$$1 - x \leqslant x^2 - x + 1 \iff 0 \leqslant x^2.$$

Dans les deux cas, l'inégalité est toujours vraie, donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x-1| \leqslant x^2 - x + 1.}$$

4. Démontrer par contraposée l'assertion suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x \neq -1) \wedge (y \neq -1) \implies 1 + x + y + xy \neq 0.$$

Écrivons la contraposée de cette assertion :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 1 + x + y + xy = 0 \implies (x = -1) \vee (y = -1).$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} 1 + x + y + xy = (1+x)(1+y) = 0 &\iff (x+1=0) \vee (y+1=0) \\ &\iff (x=-1) \vee (y=-1). \end{aligned}$$

Exercice 3 Bonus *(+5 points)*

On considère un réel x non nul et tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Pour avoir quelques idées, commençons par regarder ce qu'il se passe pour les premières valeurs de n.

— Si $n = 0$, alors $x^0 + \dfrac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{Z}$.

— Si $n = 2$, $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ donc $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 \in \mathbb{Z}$. Mais :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \qquad \implies \qquad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \in \mathbb{Z}$$

— Si $n = 3$, $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ donc $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 \in \mathbb{Z}$. Mais :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \quad \implies \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \in \mathbb{Z}$$

On pourrait continuer à élever à la puissance 4, mais on sent que les calculs se compliquent. Néanmoins, on remarque que multiplier par $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ permet d'obtenir des relations entre les quantités mises en jeu pour différentes valeurs de n.
Par exemple :

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n-1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) + \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

Montrons donc par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) =$ « $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ » est vraie.

Initialisation : La propriété est vraie au rang $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ (les deux premiers suffisent).

Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) + \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

Ainsi,

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z} \text{ d'après } \mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n-1),$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence double, on conclut :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.}$$

2 Relations

Exercice 4 Ordre partiel ou ordre total ? *(6 points)*

On considère deux relations sur $\mathbb{N}^*$:

- $x \preceq_1 y \iff x \mid y$ (divisibilité),
- $x \preceq_2 y \iff x \leqslant y$ (ordre usuel).

1. Montrer que $\preceq_1$ et $\preceq_2$ sont des relations d'ordre.

- Relation $\preceq_1$:
  - réflexive : $x \mid x$
  - antisymétrique (si $x \mid y$ et $y \mid x$ alors $x = y$)
  - transitive ($x \mid y \wedge y \mid z \implies x \mid z$).
- Relation $\preceq_2$ (ordre usuel) : réflexive, antisymétrique, transitive.

Donc ce sont des relations d'ordre.

2. Montrer que $\preceq_1$ est un ordre partiel non total et que $\preceq_2$ est un ordre total.

- $\preceq_1$ n'est pas total : il existe des incomparables, par ex. 2 et 3.
- $\preceq_2$ est total :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad (x \leqslant y) \vee (y \leqslant x).$$

Exercice 5 Classes d'équivalence *(10 points)*

On considère la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$x\mathscr{R}y \iff x \equiv y\ [4].$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

> On a $x\mathscr{R}y \iff x \equiv y\ [4]$. Nous avons déjà montré qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive).

2. Déterminer les classes d'équivalence et donner la partition associée.

> Les classes d'équivalence sont :
>
> $$\begin{aligned}\tilde{0} &= \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}\\ \tilde{1} &= \{4k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}\\ \tilde{2} &= \{4k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}\\ \tilde{3} &= \{4k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$
>
> La partition associée est $\mathbb{Z} = \tilde{0} \cup \tilde{1} \cup \tilde{2} \cup \tilde{3}$.

3. Donner un représentant canonique de chaque classe.

> Un représentant canonique possible est le reste $r \in \{0,1,2,3\}$.

Exercice 6 Relation d'ordre *(10 points)*

On définit une relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(x_1,y_1)\mathscr{R}(x_2,y_2) \iff (x_1 \leqslant x_2) \wedge (y_1 \leqslant y_2).$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est un ordre partiel.

> — Réflexive : $(x \leqslant x) \wedge (y \leqslant y) \implies (x,y)\mathscr{R}(x,y)$.
>
> — Antisymétrique : si $(x_1,y_1)\mathscr{R}(x_2,y_2)$ et réciproquement, alors $x_1 \leqslant x_2$, $x_1 \geqslant x_2$, $y_1 \leqslant y_2$ et $y_1 \geqslant y_2$, d'où $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.
>
> — Transitive : immédiat par transitivité de $\leqslant$ sur chaque coordonnée.
>
> Donc $\mathscr{R}$ est un ordre partiel.

2. Montrer que $\mathscr{R}$ n'est pas un ordre total.

> Il n'est pas total (par ex. (0,1) et (1,0) sont incomparables).

3. **Donner un exemple de sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel $\mathscr{R}$ devient un ordre total.**

Sur $S = \{(t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\mathscr{R}$ induit l'ordre usuel (total) via la première coordonnée.

3 Arithmétique (ME uniquement)

Exercice 7 Division euclidienne et puissance *(6 points)*

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

Le quotient et le reste de la division euclidienne de $a-1$ par b sont respectivement $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0,b-1]\!]$.

Quel est le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} ?

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$a - 1 = bq + r, \quad \text{avec } q \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leqslant r \leqslant b-1.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} ab^n - 1 &= ab^n - b^n + b^n + 1, \\ &= (a-1)b^n + b^n - 1, \\ &= (bq+r)b^n + b^n - 1, \\ &= b^{n+1}q + b^n(r+1) - 1. \end{aligned}$$

Puisque $0 \leqslant r \leqslant b-1$, nous en déduisons successivement :

$$\begin{gathered} 1 \leqslant r+1 \leqslant b \\ b^n \leqslant (r+1)b^n \leqslant b^{n+1} \\ b^n - 1 \leqslant (r+1)b^n - 1 \leqslant b^{n+1} - 1 \end{gathered}$$

D'une part, nous avons

$$b^n - 1 \geqslant 0 \text{ car } b \geqslant 1$$

D'autre part, puisque $b^{n+1} - 1 \in \mathbb{N}$, il vient

$$b^{n+1} - 1 < b^{n+1}$$

ce qui établit

$$0 \leqslant (r+1)b^n - 1 < b^{n+1}$$

Nous en concluons que dans la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}, le quotient est q et le reste est $r' = (r+1)b^n - 1$.

Exercice 8 Diviseur d'un produit de p entiers consécutifs *(8 points)*

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Nous désignons par P_n le produit de p entiers consécutifs dont le premier facteur est n. Il vient

$$P_n = \prod_{k=0}^{p-1}(n+k).$$

En considérant deux cas concernant le reste de la division euclidienne de n par p, montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad p \mid P_n.$$

Effectuons la division euclidienne de n par p, ce qui donne

$$n = pq + r, \quad \text{avec } q \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leqslant r < p.$$

Par disjonction, nous distinguons deux cas : $r = 0$ ou $0 < r < p$.

1^er^ cas : $r = 0$.
Dans ce cas, nous avons $n = pq$, ce qui implique

$$P_n = \prod_{k=0}^{p-1}(pq+k) = pq\prod_{k=1}^{p-1}(pq+k) = p\left(q\prod_{k=1}^{p-1}(pq+k)\right)$$

Par suite, nous obtenons

$$P_n = P_{pq} = pQ, \text{ avec } Q = q\prod_{k=1}^{p-1}(pq+k) \in \mathbb{N},$$

ce qui justifie que p divise P_n.

2^e^ cas : $0 < r < p$, c'est-à-dire $1 \leqslant r \leqslant p-1$.
Dans ce second cas, nous avons

$$P_n = \prod_{k=0}^{p-1}(pq+r+k)$$

Puisque

$$1 \leqslant r \leqslant p-1 \text{ et } 0 \leqslant k \leqslant p-1,$$

nous en déduisons, par addition membres à membres,

$$1 \leqslant r+k \leqslant 2p-1$$

Par conséquent, en posant $j = r+k$, nous obtenons

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{j=1}^{2p-1}(pq+j) \\ &= \prod_{j=1}^{p-1}(pq+j) \times (pq+p) \times \prod_{j=p+1}^{2p-1}(pq+j) \\ &= p\left(\prod_{j=1}^{p-1}(pq+j) \times (q+1) \times \prod_{j=p+1}^{2p-1}(pq+j)\right), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$P_n = P_{pq+r} = pQ',$$

avec

$$Q' = \left(\prod_{j=1}^{p-1}(pq+j) \times (q+1) \times \prod_{j=p+1}^{2p-1}(pq+j)\right) \in \mathbb{N},$$

ce qui prouve que p divise P_n.
Nous en concluons que, quel que soit l'entier $p \geqslant 1$, le produit de p entiers naturels consécutifs est divisible par p.