Lycée Saint Augustin
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes

2025–2026
M. Berard

MATHÉMATIQUES
DEVOIR MAISON N° 3

À rendre le Jeudi 13 Novembre 2025

Durée indicative : 8 heures

Barème : 43 points

Récurrence. Combinatoire. Suites.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et vous poursuivez la composition en indiquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
L'élève est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Indications :

- La présentation doit comporter le nom, la classe, la date, le numéro du devoir et un encadré pour les commentaires et la note. Vos résultats doivent être encadrés.
- Composer sur copies doubles grand carreaux uniquement.
- À la fin d'un exercice, on change de page (ou de copie) obligatoirement.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1 Une égalité fonctionnelle *(5 points)*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ satisfaisant à

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x).$$

Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x).$$

Exercice 2 Manipulation de cœfficients binomiaux *(6 points)*

Soient un entier naturel $n \geqslant 1$ et f la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$.

1. En dérivant cette fonction de deux façons, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = 2^{n-1} n.$$

2. En dérivant deux fois la fonction f et en supposant que $n \geqslant 2$, justifier

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{k}{n} = 2^{n-2} n(n+1).$$

Exercice 3 Suites *(10 points)*

Soit $q \in]0,1[$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

1. Donner la nature et le terme général de la suite (u_n).

2. Calculer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On fixe $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

- **a)** Combien y a-t-il de termes dans la somme S_n ?
- **b)** Donner une écriture simplifiée de S_n sous forme de fraction.
- **c)** Calculer la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

- **a)** Que vaut $f_n(1)$?
- **b)** Pour $x \neq 1$, simplifier l'expression de $f_n(x)$.
- **c)** Justifier que f_n est dérivable. Préciser sur quel domaine.
- **d)** Montrer que pour tout $x \in]0,1[$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

- **e)** En déduire que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k = \frac{(n+1)x^{n+2} - x^{n+1}(n+2) + 1}{(1-x)^2}.$$

Exercice 4 Suites récurrentes *(6 points)*

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} - 3^n$.

2. En remarquant que

$$u_n = 3^n \left(2 \left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right),$$

déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 Polynômes de Tchebychev[1] *(12 points)*

Pour tout entier naturel n, on considère les polynômes T_n, définis sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{cases}$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $T_2(x)$ puis $T_3(x)$.

2. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

Quelle est la parité de la fonction T_n ?

3. Pour tout $u \in]1, +\infty[$, on pose $x = \dfrac{1}{2}\left(u + \dfrac{1}{u}\right)$.

a) Justifier que dans ce cas, $x > 1$.

b) Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T_n(x) = \frac{1}{2}\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right).$$

c) En déduire que :

$$\forall\, x \in]1, +\infty[, \quad T_n(x) > 1.$$

4. **a)** Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, en utilisant les formules d'addition vues l'année dernière, montrer que

$$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

b) Pour tout $x \in [-1,1]$, on pose $x = \cos\alpha$, avec $\alpha \in [0,\pi]$. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha).$$

5. En déduire les solutions, dans l'intervalle $[-1,1]$, de l'équation

$$T_n(x) = 0.$$

1. Mathématicien russe (1821–1894)

Exercice 6 Applications et récurrence *(4 points)*

Soit $f : E \longrightarrow E$ une application. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit f^n par récurrence en posant :

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_E \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{n+1} = f^n \circ f. \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.

2. Montrer que si f est bijective, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^n est aussi bijective et que $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$.

Bon courage.