Lycée Saint Augustin — 2025–2026

Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes — M. Berard

MATHÉMATIQUES

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Durée indicative : 2 heures

Barème : 23 points

Logique et ensembles. Applications. Arithmétique.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, d'une part vous le signalez au surveillant, d'autre part vous le signalez sur votre copie et vous poursuivez la composition en indiquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

L'élève est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Calculatrice interdite.

Indications :

- La présentation doit comporter le nom, la classe, la date, le numéro du devoir et un encadré pour les commentaires et la note. Vos résultats doivent être encadrés.
- Composer sur copies doubles grand carreaux uniquement.
- À la fin d'un exercice, on change de page (ou de copie) obligatoirement.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.
- **La consultation du cours polycopié est autorisé, à l'exclusion de tout autre document (notes manuscrites, TD, corrections...)**

1 Logique, ensembles

Exercice 1 Quantificateurs *(8 points)*

1. Traduire à l'aide de quantificateurs mathématiques :
   a) La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   b) La fonction g admet un minimum sur $\mathbb{R}^*$.
   c) La fonction h est constante sur $[-1,1]$.
   d) Tous les réels de $[-1,1]$ sont de la forme $\sin(\theta)$.
2. Convertir en langage usuel :
   a) $\forall\,(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_m$.
   b) $\forall\,n \in \mathbb{N},\ (\exists\,p \in \mathbb{N},\ n = 2p+1) \implies (\exists\,q \in \mathbb{N},\ n^2 = 2q+1)$.
3. Voici la définition avec des quantificateurs de « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ». Nier cette assertion :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,N \in \mathbb{N},\ n > N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

4. <u>Justifier</u> si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
   a) $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 = y^2 \implies x = y$.
   b) $\forall\,x \in [0,+\infty[,\ x^2 > x$.
   c) Tout nombre entier de la forme $4n-1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est premier.
   d) $\forall\,y \in]-1,1[,\ \exists\,x \in]-1,1[,\ y < x$.

Exercice 2 L'opération ∇ **(Louis seulement)** *(4 points)*

Soit E un ensemble. Pour tous sous-ensembles A et B de E, on pose $A \nabla B = \overline{A \cup B}$.

1. Soit A un sous-ensemble de E. Exprimez $\overline{A}$ à l'aide de A et de l'opération ∇.
2. Soit A et B deux sous-ensembles de E, calculer et simplifier $(A\nabla A)\nabla(B\nabla B)$.
3. Soit A et B deux sous-ensembles de E. Exprimer $A \cup B$ et $A \cap B$ à l'aide de A, B et de la loi ∇ uniquement.
   Remarque : cela signifie qu'il ne faut laisser ni union, ni intersection, ni complémentaire dans le résultat de cette question.

2 Arithmétique (Maths expertes seulement)

Exercice 3 Division de polynômes entiers *(4 points)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de

1. $8n - 3$ par $4n + 1$,
2. $3n^2 + 2n$ par $n + 1$.

Exercice 4 Une démonstration *(6 points)*

Soient E et F deux ensembles.

Montrer qu'il existe une application injective de E dans F si et seulement s'il existe une application surjective de F dans E.

Cet exercice est un exercice de rédaction. Soyez extrêmement rigoureux dans vos raisonnements et prenez soin d'expliquer ce que vous faites clairement.

3 Applications

Exercice 5 Bijection(s) *(5 points)*

On s'intéresse à l'application $h : [-1{,}1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto 1 - x^2.$$

1. La fonction h est-elle injective ? surjective ?

2. Soit $h_1 : [0{,}1] \to [0{,}1], \quad x \mapsto 1 - x^2$. Montrer que h_1 est bijective et déterminer h_1^{-1}.

3. Soit $h_2 : [-1{,}0] \to [0{,}1], \quad x \mapsto 1 - x^2$. Montrer que h_2 est bijective et déterminer h_2^{-1}.

Bon courage.