Lycée Saint Augustin

Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes

2025–2026

M. Berard

# MATHÉMATIQUES

## CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

**Durée : 2 heures**

***Barème : 27 points***

# Logique et ensembles. Applications. Arithmétique.

# 1 Logique, ensembles

**Exercice 1** Quantificateurs *(12 points)*

1. **Traduire à l'aide de quantificateurs mathématiques :**
   a) *(1 pt)* **La fonction $f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.**

   $$\forall\, x,y \in \mathbb{R}_+, \quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y).$$

   b) *(1 pt)* **La fonction $g$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^*$.**

   $$\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^*, \forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

   c) *(1 pt)* **La fonction $h$ est constante sur $[-1,1]$.**

   $$\forall\, x,y \in [-1,1], \quad f(x) = f(y).$$

   d) *(1 pt)* **Tous les réels de $[-1,1]$ sont de la forme $\sin(\theta)$.**

   $$\forall\, x \in [-1,1], \exists\, \theta \in \mathbb{R}, \quad x = \sin(\theta).$$

2. Convertir en langage usuel :
   a) *(1 pt)* $\forall\, (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = u_m$.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante sur $\mathbb{N}$.

   b) *(1 pt)* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(\exists\, p \in \mathbb{N},\, n = 2p+1) \implies (\exists\, q \in \mathbb{N},\, n^2 = 2q+1)$.

   Le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

3. *(1 pt)* Voici la définition avec des quantificateurs de « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ». **Nier cette assertion :**

   $$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N},\, n > N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

   $$\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, N \in \mathbb{N},\, (n > N) \wedge \big(|u_n - \ell| > \varepsilon\big).$$

4. **<u>Justifier</u> si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.**
   a) *(1 pt)* $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 = y^2 \implies x = y$.

   Cette affirmation est **fausse**. En effet, $(-1)^2 = 1^2$ et $-1 \neq 1$.

**b)** *(1 pt)* $\forall\, x \in [0, +\infty[,\ x^2 > x$.

Cette affirmation est **fausse**. En effet, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}$.

**c)** *(1 pt)* **Tout nombre entier de la forme** $4n-1$ **avec** $n \in \mathbb{N}^*$ **est premier.**

Cette affirmation est **fausse**. En effet, avec $n = 4$, $15 = 4 \times 4 - 1$ et $15$ n'est pas premier (c'est un multiple de 3.

**d)** *(2 pt)* $\forall\, y \in ]-1{,}1[,\ \exists\, x \in ]-1{,}1[,\ y < x$.

Cette affirmation est **vraie**. Montrons-la.

Soit $y \in ]-1{,}1[$.
On pose
$$x = \frac{y+1}{2}.$$
Comme $y > -1$, $y + 1 > 0$ donc $x > 0 > -1$.
Comme $y < 1$, $y + 1 < 2$, donc $x < 1$.
Ainsi, $x \in ]-1{,}1[$.

Par ailleurs :
$$\begin{aligned} y < 1 &\iff 2y < y + 1 \\ &\iff y < \frac{y+1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $y < x$.

On a donc bien :
$$\forall\, y \in ]-1{,}1[,\ \exists\, x \in ]-1{,}1[,\quad y < x.$$

**Exercice 2** L'opération $\nabla$ **(Louis seulement)** *(4 points)*

Soit $E$ un ensemble. Pour tous sous-ensembles $A$ et $B$ de $E$, on pose $A \nabla B = \overline{A \cup B}$.

**1.** *(1 pt)* **Soit** $A$ **un sous-ensemble de** $E$**. Exprimez** $\overline{A}$ **à l'aide de** $A$ **et de l'opération** $\nabla$**.**

$A \nabla A = \overline{A \cup A} = \overline{A}$.

**2.** *(1 pt)* **Soit** $A$ **et** $B$ **deux sous-ensembles de** $E$**, calculer et simplifier** $(A \nabla A) \nabla (B \nabla B)$**.**

$(A \nabla A) \nabla (B \nabla B) = \overline{A} \nabla \overline{B} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$.

**3.** *(2 pts)* **Soit $A$ et $B$ deux sous-ensembles de $E$. Exprimer $A \cup B$ et $A \cap B$ à l'aide de $A$, $B$ et de la loi $\nabla$ uniquement.**

*Remarque : cela signifie qu'il ne faut laisser ni union, ni intersection, ni complémentaire dans le résultat de cette question.*

Comme vu à la question précédente :

$$A \cap B = (A \nabla A) \nabla (B \nabla B).$$
$$A \cup B = \overline{A \nabla B} = (A \nabla B) \nabla (A \nabla B).$$

# 2 Arithmétique (Maths expertes seulement)

**Exercice 3** Division de polynômes entiers *(4 points)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. **Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de**

**1.** *(2 pts)* $8n - 3$ **par** $4n + 1$**,**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Nous faisons apparaître le quotient $4n + 1$ en décomposant $8n - 3$ de la façon suivante :

$$8n - 3 = 8n + 2 - 2 - 3 = (4n + 1) \times 2 - 5.$$

La condition sur le reste $r$ de cette division euclidienne est

$$0 \leqslant r < 4n + 1.$$

Ainsi l'égalité précédente ne convient pas. Cependant, nous en déduisons

$$\begin{aligned} 8n - 3 &= (4n + 1) \times 2 - (4n + 1) + (4n + 1) - 5 \\ &= (4n + 1) \times 1 + 4n - 4 \end{aligned}$$

Puisque, pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$0 \leqslant 4(n - 1) < 4n + 1,$$

nous en concluons que dans la division euclidienne de $8n - 3$ par $4n + 1$, le reste est $r = 4(n - 1)$, le quotient est $q = 1$.

**2.** *(2 pts)* $3n^2 + 2n$ **par** $n + 1$**.**

Division de $3n^2 + 2n$ par $n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Nous pouvons utiliser la méthode précédente en faisant apparaître le terme $n + 1$. Cependant nous proposons une autre méthode en divisant le polynôme $3n^2 + 2n$ par $n + 1$.

Cette dernière est effectuée en adoptant la disposition qui suit.

$$\begin{array}{c|c} 3n^2+2n & n+1 \\ \cline{2-2} \underline{-(3n^2+3n)} & 3n-1 \\ -n & \\ \underline{-(-n-1)} & \\ +1 & \end{array}$$

Il en résulte, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$3n^2 + 2n = (n+1)(3n-1) + 1, \quad \text{avec } 0 \leqslant 1 < n+1$$

ce qui justifie que dans la division euclidienne de $3n^2 + 2n$ par $n + 1$, le reste est $r = 1$, le quotient est $q = 3n - 1$.

# 3 Applications

**Exercice 4** Une démonstration *(6 points)*

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

**Montrer qu'il existe une application injective de $E$ dans $F$ si et seulement s'il existe une application surjective de $F$ dans $E$.**

*Cet exercice est un exercice de rédaction. Soyez extrêmement rigoureux dans vos raisonnements et prenez soin d'expliquer ce que vous faites clairement.*

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons qu'il existe une injection $f$ de $E$ vers $F$. Chaque élément de $f(E)$ a donc exactement un antécédent par $f$. Soit $x_0 \in E$. Soit $g : F \longrightarrow E$ l'application définie ainsi : si $y \in f(E)$, alors $g(y)$ est l'unique antécédent de $y$ par $f$ ; si $y \notin f(E)$, $g(y) = x_0$. L'application $g$ est bien définie. Montrons qu'elle est surjective. Soit $x \in E$. Soit $y$ son image par $f$. Par définition, $y \in f(E)$, donc $g(y)$ est l'unique antécédent de $y$ par $f$, donc $g(y) = x$. Donc $x$ a au moins un antécédent par $g$, donc $g$ est surjective. Donc il existe une surjection de $F$ vers $E$. (remarque : l'application $g$ dépend du choix de $x_0$, mais peu importe : pour n'importe quel choix de $x_0$, elle est bien définie et surjective).

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons qu'il existe une surjection $g$ de $F$ vers $E$. Chaque élément de $E$ a donc au moins un antécédent par $g$. Pour chaque élément $x$ de $E$, choisissons un de ses antécédents par $g$ (peu importe lequel), et appelons-le $f(x)$. Cela définit une application $f : E \to F$. Montrons que cette application est injective. Soit $x \in E$. Par définition, $f(x)$ est un antécédent de $x$ par $g$, donc $g(f(x)) = x$, donc $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, donc $g \circ f$ est bijective, donc injective. Donc $f$ est injective. Donc il existe une injection de $E$ dans $F$.

**Exercice 5** Bijection(s) *(5 points)*

On s'intéresse à l'application $h$ :

$$h \left| \begin{array}{rcl} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1-x^2 \end{array} \right.$$

**1.** *(1 pt)* **La fonction $h$ est-elle injective ? surjective ?**

— On a :

$$h \text{ injective} \iff \forall\,(x_1,x_2) \in [-1,1]^2,\ x_1 \neq x_2 \implies h(x_1) \neq h(x_2).$$

Or $-1 \neq 1$ et $h(-1) = 1-(-1)^2 = 0 = h(1)$. On a donc

$$\exists\,(x_1,x_2) \in [-1,1]^2,\ (x_1 \neq x_2) \wedge \big(h(x_1) = h(x_2)\big),$$

ce qui équivaut à $\boxed{h \text{ non injective.}}$

— D'autre part :

$$h \text{ surjective} \iff \forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in [-1,1],\ y = h(x).$$

Or, pour tout réel $x$, $1-x^2 \leqslant 1$ ; l'équation $2 = 1-x^2$ n'admet ainsi pas de solutions sur $[-1,1]$. On a donc

$$\exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in [-1,1],\ y \neq h(x),$$

ce qui équivaut à $\boxed{h \text{ non surjective.}}$

**2.** *(2 pt)* **Soit $h_1 : [0,1] \to [0,1], \quad x \mapsto 1-x^2$. Montrer que $h_1$ est bijective et déterminer ${h_1}^{-1}$.**

Soit la fonction $g_1$ définie par :

$$g_1 \left| \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \sqrt{1-x} \end{array} \right.$$

On a d'une part, pour tout $x \in [0,1]$ :

$$\begin{aligned} g_1 \circ h_1(x) &= g_1\left(1-x^2\right) \\ &= \sqrt{1-(1-x^2)} \\ &= \sqrt{x^2} \\ &= |x| \\ &= x \quad \text{car } x \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $g_1 \circ h_1 = \mathrm{Id}_{[0,1]}$.

D'autre part, on a, pour tout $x \in [0,1]$ :

$$\begin{aligned} h_1 \circ g_1(x) &= h_1\left(\sqrt{1-x}\right) \\ &= 1 - \left(\sqrt{1-x}\right)^2 \\ &= 1-(1-x) \\ &= x \end{aligned}$$

Ainsi, $h_1 \circ g_1 = \mathrm{Id}_{[0,1]}$.
Par conséquent, $\boxed{h_1 \text{ est bijective et } {h_1}^{-1} = g_1.}$

**3.** *(2 pt)* **Soit $h_2 : [-1,0] \to [0,1], \quad x \mapsto 1-x^2$. Montrer que $h_2$ est bijective et déterminer ${h_2}^{-1}$.**

Soit la fonction $g_2$ définie par :

$$g_2 \left| \begin{array}{rcl} [-1,0] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & -\sqrt{1-x} \end{array} \right.$$

On a d'une part, pour tout $x \in [-1,0]$ :

$$\begin{aligned} g_2 \circ h_2(x) &= g_2\left(1-x^2\right) \\ &= -\sqrt{1-(1-x^2)} \\ &= -\sqrt{x^2} \\ &= -|x| \\ &= x \quad \text{car } x \leqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $g_2 \circ h_2 = \mathrm{Id}_{[-1,0]}$.

D'autre part, on a, pour tout $x \in [0,1]$ :

$$\begin{aligned} h_2 \circ g_2(x) &= h_2\left(-\sqrt{1-x}\right) \\ &= 1 - \left(-\sqrt{1-x}\right)^2 \\ &= 1-(1-x) \\ &= x \end{aligned}$$

Ainsi, $h_2 \circ g_2 = \mathrm{Id}_{[0,1]}$.
Par conséquent, $\boxed{h_2 \text{ est bijective et } {h_2}^{-1} = g_2.}$