Chapitre 3 **Applications**

Correspondances, fonctions, applications

- **Définition :** Produit cartésien ; $\mathrm{card}(E\times F)=\mathrm{card}(E)+\mathrm{card}(F)$; Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.
- **Définition :** Une application f de E vers F est la donnée d'un triplet (E,F,Γ) où Γ est une partie de $E\times F$ telle que :
$$\forall (x,y,y')\in E\times F\times F,\ [(x,y)\in\Gamma \text{ et } (x,y')\in\Gamma] \implies y=y'.$$
On écrit $y=f(x)$ plutôt que $(x,y)\in\Gamma$.
- **Définition :** Une application est une fonction dont l'ensemble de définition est égal à l'ensemble de départ. En pratique, on tolère l'utilisation de « fonction » et « application » indifféremment. On note l'ensemble des fonctions de E dans F par $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E.
- **Définition :** L'ensemble de définition de f est : $\{x\in E \mid \exists y\in F,\ (x,y)\in\Gamma\}$.
- **Propriété :** Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $u=(\Gamma,E,F)$ une application, avec Γ le graphe de u. On a alors : $\forall x\in E,\ \exists!\, y\in F,\quad (x,y)\in\Gamma$.
- **Définition :** L'ensemble image de f, noté $\mathrm{Im}(f)$ ou $f(E)$ est l'ensemble $\{f(x)\mid x\in E\}$.
- **Définition :** Restriction, prolongement.

Applications injectives, surjectives et bijectives

- **Définitions :**
  - f injective : $\forall (x_1,x_2)\in E^2,\quad x_1\neq x_2 \implies f(x_1)\neq f(x_2)$.
  - f surjective : $\forall y\in F, \exists x\in E,\quad y=f(x)$.
  - f bijective : injective et surjective.
- **Propriété (caractérisation des injections) :** Les propositions suivantes sont équivalentes :

  (i) L'application f est injective.
  (ii) Tout élément de F possède au plus un antécédent par f.
  (iii) Pour tout $y\in F$, l'équation $f(x)=y$ possède au plus une solution.
  (iv) $\forall (x_1,x_2)\in E^2,\quad (f(x_1)=f(x_2) \implies x_1=x_2)$.
- **Propriété (caractérisation des surjections) :** Les propositions suivantes sont équivalentes :

  (i) L'application f est surjective.
  (ii) Tout élément de F a au moins un antécédent par f.
  (iii) Pour tout $y\in F$, l'équation $f(x)=y$ possède au moins une solution.
  (iv) $\forall y\in F, \exists x\in E,\quad y=f(x)$.
- **Propriété (caractérisation des bijections) :** Les propositions suivantes sont équivalentes :

  (i) L'application f est bijective.
  (ii) Tout élément de F a un et un seul antécédent par f.
  (iii) Pour tout $y\in F$, l'équation $f(x)=y$ possède une unique solution.
  (iv) $\forall u\in F, \exists! x\in E,\quad y=f(x)$.

Composition des applications

- **Définition :** L'application $h: E\longrightarrow G$ définie par : $\forall x\in E,\quad h(x)=g[f(x)]$ est appelée *composée* de f par g et notée $g\circ f$.
- **Définition et propriétés :** La composition des applications « $\circ$ » est une opération associative mais non commutative en général : $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ mais $g\circ f\neq f\circ g$ en général.
- **Exemple :** Composition des translations de vecteur du plan.

Propriétés (composée d'injections, surjections, bijections) : Soient $f\in F^E$ et $g\in G^F$.

1. Si f et g sont injectives, alors $g\circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjective, alors $g\circ f$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives, alors $g\circ f$ est bijective.

Propriétés : Soient $f: E\longrightarrow F$ et $g: F\longrightarrow G$ des applications.

1. Si $g\circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Si $g\circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Application réciproque

- **Définition (Application réciproque) :** Soit f une bijection de E dans F. Alors, pour tout $y \in F$, il existe un unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On définit ainsi une application $f^{-1} : F \longrightarrow E$ qui est aussi bijective, et qu'on appelle *application réciproque* de f.
- **Exemple :** La fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array} \right.$$

est bijective et sa fonction réciproque est l'application

$$f^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array} \right. .$$

- **Définition :** Application identité

$$\mathrm{Id}_E \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. .$$

Propriété (caractérisation de la fonction réciproque) : Si $f : E \to F$ est une application, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective de E sur F ;
2. Il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

De plus, si l'une des conditions est vérifiée, la fonction g est unique et est appelée *fonction réciproque de* f, notée f^{-1}.

- **Remarque :** On peut avoir $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ ou $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ sans que f et g soient bijectives.
- **Corollaire :**

1. Si $f \in F^E$ est bijective, alors u^{-1} est bijective et $(u^{-1})^{-1} = u$.
2. Si $u \in F^E$ et $v \in G^F$ sont deux applications bijectives, alors $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.

Images directes et réciproques d'ensembles

- **Définition (Images directe et réciproque d'une partie) :** Si $f \in F_E$, on définit :
  - $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f(A) = \{f(x), x \in A\}$.
  - $\forall B \in \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.
- **Propriétés :** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soient A et B deux parties de E, C et D deux parties de F. On a alors :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
5. $f\big(f^{-1}(C)\big) \subset C$.
6. $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$.

Fonction indicatrice (ou caractéristique)

- **Définition :** Soit $A \subset E$. La *fonction indicatrice* de A, ou encore *fonction caractéristique* de A, est la fonction de E dans $\{0,1\}$, notée $\mathbb{1}_A$ et définie par :

$$\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

- **Propriété :** Si A et B sont deux parties de E, on a :

1. pour l'intersection : $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$,
2. pour la réunion : $\mathbb{1}_{A \cup B} = \sup(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$,
3. pour le complémentaire : $\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A$.

- **Remarque :** Pour un ensemble fini, on a la relation : $\displaystyle\sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) = \mathrm{card}(A)$.

Propriété : L'application

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E, \{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$$

est une bijection.

Familles indexées

- **Définition :** Si I est un ensemble quelconque, une application de I dans E est aussi appelée *famille d'éléments* de E indexée par I.
- **Notation :** L'utilisation du terme famille sous-entend que l'on utilise la notation indexée $(x_i)_{i \in I}$ au lieu de la notation fonctionnelle, bien qu'il s'agisse d'une application.
- **Exemple :** Une suite d'éléments de E est une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$: on la note $(u_n)_{i \in \mathbb{N}}$.
- **Vocabulaire :** Si $I = [\![1,p]\!]$, alors une famille d'éléments de E indexée par I est aussi appelée *p-liste* ou *p-uplet*.
- **Notation :** La famille $(x_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ se note couramment $(x_1, \ldots, x_p)$, et l'ensemble $\mathbb{R}^I = \mathbb{R}^{[\![1,p]\!]}$ se note plus simplement $\mathbb{R}^p$.
- **Définition :** Si $J \subset I$, la famille $(x_i)_{i \in J}$ est appelée *sous-famille* de $(x_i)_{i \in I}$.
- **Propriétés :** Généralisation de l'union et de l'intersection aux familles de parties de E.

!

► Pour les parties désignées par un symbole

Propriété : une démonstration est exigible.

► Une colle comporte une question de cours choisie *a priori* parmi celles indiquées dans le programme de la semaine en cours (normalement, ±15 min).

► Un cours non appris sera sanctionné par une note inférieure à 10 (même si l'exercice est fait correctement !).