Chapitre 3 Applications

Application réciproque

- **Définition (Application réciproque) :** Soit f une bijection de E dans F. Alors, pour tout $y \in F$, il existe un unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On définit ainsi une application $f^{-1} : F \longrightarrow E$ qui est aussi bijective, et qu'on appelle *application réciproque* de f.
- **Exemple :** La fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array} \right.$$

est bijective et sa fonction réciproque est l'application

$$f^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array} \right. .$$

- **Définition :** Application identité

$$\mathrm{Id}_E \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. .$$

Propriété (caractérisation de la fonction réciproque) : Si $f : E \to F$ est une application, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective de E sur F ;
2. Il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

De plus, si l'une des conditions est vérifiée, la fonction g est unique et est appelée *fonction réciproque de f*, notée f^{-1}.

- **Remarque :** On peut avoir $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ ou $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ sans que f et g soient bijectives.
- **Corollaire :**

1. Si $f \in F^E$ est bijective, alors u^{-1} est bijective et $(u^{-1})^{-1} = u$.
2. Si $u \in F^E$ et $v \in G^F$ sont deux applications bijectives, alors $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.

Images directes et réciproques d'ensembles

- **Définition (Images directe et réciproque d'une partie) :** Si $f \in F_E$, on définit :
  - $\forall\, A \in \mathcal{P}(E)$, $f(A) = \{f(x), x \in A\}$.
  - $\forall\, B \in \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.
- **Propriétés :** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soient A et B deux parties de E, C et D deux parties de F.
  On a alors :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
5. $f\big(f^{-1}(C)\big) \subset C$.
6. $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$.

Fonction indicatrice (ou caractéristique)

- **Définition :** Soit $A \subset E$. La *fonction indicatrice* de A, ou encore *fonction caractéristique* de A, est la fonction de E dans $\{0,1\}$, notée $\mathbb{1}_A$ et définie par :

$$\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

- **Propriété :** Si A et B sont deux parties de E, on a :

1. pour l'intersection : $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$,
2. pour la réunion : $\mathbb{1}_{A \cup B} = \sup(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$,
3. pour le complémentaire : $\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A$.

- **Remarque :** Pour un ensemble fini, on a la relation : $\displaystyle\sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) = \mathrm{card}(A)$.

Propriété : L'application

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E,\{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$$

est une bijection.

Familles indexées

- **Définition :** Si I est un ensemble quelconque, une application de I dans E est aussi appelée *famille d'éléments de E indexée par I*.
- **Notation :** L'utilisation du terme famille sous-entend que l'on utilise la notation indexée $(x_i)_{i \in I}$ au lieu de la notation fonctionnelle, bien qu'il s'agisse d'une application.
- **Exemple :** Une suite d'éléments de E est une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$: on la note $(u_n)_{i \in \mathbb{N}}$.
- **Vocabulaire :** Si $I = [\![1,p]\!]$, alors une famille d'éléments de E indexée par I est aussi appelée *p-liste* ou *p-uplet*.
- **Notation :** La famille $(x_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ se note couramment $(x_1, \ldots, x_p)$, et l'ensemble $\mathbb{R}^I = \mathbb{R}^{[\![1,p]\!]}$ se note plus sim-

plement $\mathbb{R}^p$.

- **Définition :** Si $J \subset I$, la famille $(x_i)_{i\in J}$ est appelée *sous-famille* de $(x_i)_{i\in I}$.
- **Propriétés :** Généralisation de l'union et de l'intersection aux familles de parties de E.

Chapitre 4 **Relations**

Relations binaires

- **Définition :** On appelle *relation binaire* $\mathscr{R}$ sur un ensemble E tout prédicat à deux variables défini sur l'ensemble $E \times E$.
- **Exemples :** « $\geqslant$ », « $=$ » ou « $\subset$ » sont des relations binaires.
- **Définition :** On dit qu'une relation binaire $\mathscr{R}$ sur un ensemble E est :

(R) *réflexive* si elle vérifie :

$$\forall\, x \in E, \quad x\mathscr{R}y.$$

(S) *symétrique* si elle vérifie :

$$\forall\,(x,y) \in E^2, \quad (x\mathscr{R}y \implies y\mathscr{R}x).$$

(AS) *antisymétrique* si elle vérifie :

$$\forall\,(x,y) \in E^2, \quad \left(\left\{ \begin{array}{c} x\mathscr{R}y \\ \text{et} \\ y\mathscr{R}x \end{array} \right. \implies x = y \right).$$

(T) *transitive* si elle vérifie :

$$\forall\,(x,y,z) \in E^3, \quad \left(\left\{ \begin{array}{c} x\mathscr{R}y \\ \text{et} \\ y\mathscr{R}x \end{array} \right. \implies x\mathscr{R}y \right).$$

Relations d'équivalence

- **Définition :** Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. On dit que $\mathscr{R}$ est une *relation d'équivalence* si elle est réflexive, symétrique et transitive.
- **Définition (classe d'équivalence, ensemble quotient) :** Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.
  - Pour tout $x \in E$, on appelle *classe d'équivalence* de x suivant $\mathscr{R}$ l'ensemble $\widetilde{x} = \{y \in E \mid x\mathscr{R}y\}$. Une partie X de E est une *classe d'équivalence* s'il existe un $x \in E$ tel que $X = \widetilde{x}$; un tel x est alors appelé un *représentant de* X.
  - Le sous-ensemble de $\mathscr{P}(E)$ constitué par les classes d'équivalence suivant $\mathscr{R}$ s'appelle l'*ensemble quotient* de E par $\mathscr{R}$ et est noté $E/\mathscr{R}$.

Propriété : Étant donné une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur un ensemble E, ainsi que deux éléments x et y de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i)\ x\mathscr{R}y \qquad (ii)\ y \in \widetilde{x} \qquad (iii)\ \widetilde{x} = \widetilde{y}.$$

- **Définition (partition) :** On appelle *partition* d'un ensemble E, tout ensemble de parties de E non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à E. Autrement dit, c'est une partie $\mathscr{U}$ de E telle que :
  - $\forall\, A \in \mathscr{U}, \quad A \neq \varnothing$,
  - $\forall\,(A,B) \in \mathscr{U}^2, \quad A \neq B \implies A \cap B = \varnothing$,
  - $\displaystyle\bigcup_{A\in\mathscr{U}} A = E$.

Théorème (relation d'équivalence et partition) : Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Alors $E/\mathscr{R}$ est une partition de E.

Relations d'ordre

- **Définition (relation d'ordre) :** Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E.

  On dit que $\mathscr{R}$ est une *relation d'ordre* si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
- **Définition (ensemble ordonné) :** On appelle *ensemble ordonné* tout couple $(E, \preceq)$ où E est un ensemble non vide et où $\preceq$ est une relation d'ordre sur cet ensemble.

  On note $x \prec y$ la relation $(x \preceq y) \wedge (x \neq y)$.
- **Définition :** Ordre total, ordre partiel.
- **Définition (majorant, minorant) :** Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.
  - Un élément $m \in E$ est dit *minorant* de A si, pour tout $a \in A$, on a $m \preceq a$.
  - Un élément $M \in E$ est dit *majorant* de A si, pour tout $a \in A$, on a $a \preceq M$.
  - A est dite *majorée* (resp. *minorée*) dans E s'il existe au moins un majorant (resp. un minorant) de A.
- **Définition (maximum, minimum) :** Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.
  - Un élément $m \in E$ est appelé *plus petit élément* (ou *minimum*) de E si, pour tout $x \in E$, $m \preceq x$.
    Quand il existe, le minimum de E se note $\min(E)$ ou $\min E$.
  - Un élément $M \in E$ est appelé *plus grand élément* (ou *maximum*) de E si, pour tout $x \in E$, $x \preceq M$.
    Quand il existe, le maximum de E se note $\max(E)$ ou $\max E$.
- **Remarque :** le maximum (resp. minimum) d'une partie A de E est un majorant (resp. minorant) qui appartient à A.
- **Notation :** Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les nombres réels $\max\{x,y\}$ et $\min\{x,y\}$ se notent respectivement $\max(x,y)$ et $\min(x,y)$.
- **Définition (borne supérieure) :** Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

La *borne supérieure* de A dans E est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A dans E.

On la note $\sup(A)$ ou $\sup_{x\in A}(x)$. On a, sous réserve d'existence :

$$\sup(A) = \min\{M \in E \mid \forall\, x \in A,\, x \preceq M\}$$

► **Définition (borne inférieure) :** Se définit de manière analogue.

Propriété (caractérisation de la borne supérieure) : : Soit A une partie non vide d'un ensemble E totalement ordonné pour la relation $\preceq$.
Pour qu'un élément S de E soit la borne supérieure de A dans E, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1. $\forall\, a \in A,\, a \preceq S$;
2. $\forall\, b \in E : b \prec S \implies \exists\, a \in A : b \prec a$.

► **Propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$:** Toute partie non vide et majorée de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
On dit que $\mathbb{R}$ possède la *propriété de la borne supérieure*.

!

► Pour les parties désignées par un symbole

Propriété : une démonstration est exigible.

► Une colle comporte une question de cours choisie *a priori* parmi celles indiquées dans le programme de la semaine en cours (normalement, ±15 min).
► Un cours non appris sera sanctionné par une note inférieure à 10 (même si l'exercice est fait correctement !).