Chapitre 7 Combinatoire – Dénombrement

Ensembles finis

- **Définition (ensemble fini et cardinal) :**
  - Un ensemble E non vide est dit *fini* s'il existe un entier naturel n non nul et une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur E.
  - Nous admettrons qu'un tel entier n, s'il existe, est unique. Il est appelé le *cardinal* de E et correspond au nombre d'éléments de E. On le note $\text{Card}(E)$ ou $|E|$.
  - Par convention, on a en particulier $\text{Card}\,\varnothing = 0$.
  - Un ensemble est dit *infini* s'il n'est pas fini.
- **Remarques :**
  1. Soit E un ensemble fini, de cardinal $n \geqslant 1$.
     Une bijection $i \longmapsto a_i$ de $[\![1,n]\!]$ sur E permet de numéroter les éléments de E et d'écrire $E = \{a_1,a_2,\dots,a_n\}$.
  2. L'ensemble vide est le seul ensemble de cardinal nul.
  3. On appelle *singleton*, tout ensemble de cardinal 1.
- **Propriété :** Si E est un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$ et si F est un ensemble qui peut être mis en bijection avec E, alors F est aussi fini de cardinal n.
- **Remarque :** On en déduit que si E est un ensemble infini et si F peut être mis en bijection avec E, alors F est infini.

Principe additif

Propriété (principe additif) : Soient A et B deux ensembles finis disjoints. Nous disposons de l'égalité

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}\,A + \text{Card}\,B.$$

- **Corollaire :** Soient E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E. En désignant par $\overline{A}$ le complémentaire de A relativement à E, nous avons

$$\text{Card}\,\overline{A} = \text{Card}\,E - \text{Card}\,A.$$

Propriété (généralisation du principe additif) : Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A_1,A_2,\dots,A_n$, n ensembles finis disjoints deux à deux. Nous disposons de l'égalité

$$\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{Card}\,A_k.$$

Propriété (cas $A \cap B \neq \varnothing$) : Soient A et B deux ensembles finis. Nous disposons de l'égalité

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}\,A + \text{Card}\,B - \text{Card}(A \cap B).$$

Produit cartésien (rappels)

- **Définition (couple) :** Soient A et B deux ensembles, $a \in A$ et $b \in B$.
  Le *couple* formé par les éléments a et b, noté (a,b), est la donnée de a et b dans cet ordre.
- **Remarque :** Cela signifie qu'en général :
$$(a,b) \neq (b,a).$$
- **Définition (produit cartésien) :** Soient A et B deux ensembles.
  Le *produit cartésien* de ces deux ensembles, noté $A \times B$, est l'ensemble des couples (a,b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.
  En d'autres termes :
$$A \times B = \{(a,b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$
- **Remarques :**
  - $A \times \varnothing = \varnothing$.
  - Pour tous les ensembles A et B, $A \times B \neq B \times A$.
- **Définition (n-uplet) :** Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A_1,A_2,\dots,A_n$ n ensembles.
  Le *n-uplet* formé par les éléments $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, …, $a_n \in A_n$, noté $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ est la donnée de $a_1,a_2,\dots,a_n$ dans cet ordre.
- **Définition (produit cartésien de n ensembles) :** Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A_1,A_2,\dots,A_n$ n ensembles.
  Le produit cartésien de ces n ensembles, noté
$$\prod_{k=1}^{n} A_k = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n,$$
  est l'ensemble des n-uplets $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ tels que $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, …, $a_n \in A_n$. En d'autres termes :
$$\prod_{k=1}^{n} A_k = \{(a_1,a_2,\dots,a_n) \mid (a_1 \in A_1) \wedge \cdots \wedge (a_n \in A_n)\}.$$
- **Définition :** Soient un entier $n \geqslant 2$ et A un ensemble non vide.
  On pose :
$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}.$$

Principe multiplicatif

Propriété (principe multiplicatif) : Soient A et B deux ensembles finis.
Nous disposons de l'égalité

$$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B).$$

Propriété (généralisation du principe multiplicatif) : Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A_1,A_2,\ldots,A_n$ n ensembles.
Nous disposons de l'égalité

$$\mathrm{Card}\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{Card}(A_k).$$

- **Remarque :** Le principe multiplicatif peut être énoncé de la façon suivante : si une situation aléatoire comporte n choix, chaque choix ayant respectivement $a_1,a_2,\ldots,a_n$ possibilités, alors le nombres d'issues possibles est

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n.$$

- **Exemple :** Recettes de cuisine.
- **Exemple :** Dénombrement des nombres à 8 chiffres.
- **Propriété (cardinal de A^n) :** Soit A un ensemble fini. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathrm{Card}\left(A^n\right) = \big(\mathrm{Card}(A)\big)^n.$$

- **Exemple :** $\mathrm{Card}\left(\{0,1\}^n\right) = 2^n$.

Listes avec répétitions

- **Définition (k-liste avec répétitions) :** Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
  Une *k-liste avec répétitions* d'éléments de E est une suite ordonnée de k éléments de E distincts ou non.
  En d'autres termes, une k-liste avec répétitions d'éléments de E est un k-uplet d'éléments de E.
- **Remarque :** Une k-liste avec répétitions d'éléments est parfois appelée un *arrangement avec répétitions* de k éléments de E.
- **Exemple :** Tirage successif avec remise
- **Propriété (dénombrement des k-listes avec répétitions) :** Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

  Le nombre de k-listes avec répétitions d'éléments de E est n^k.
- **Remarque :** Une k-liste avec répétitions d'éléments de E est une application de $[\![1,k]\!]$ dans E. Par conséquent, le nombre d'applications de $[\![1,k]\!]$ dans E est n^k.

Listes sans répétition

- **Définition (k-liste sans répétition) :** Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
  Une *k-liste sans répétition* d'éléments de E est une suite ordonnée de k éléments distincts de E.
  En d'autres termes, une k-liste sans répétition d'éléments de E est un k-uplet d'éléments distincts de E.
- **Remarques :**
  - Sans répétition impose $k \leqslant n$.
  - Une k-liste sans répétition d'éléments est aussi nommée arrangement de k éléments parmi les n éléments de E.
  - Dans une urne contenant n boules, une k-liste sans répétition d'éléments de l'ensemble de ces n boules est un tirage successif de k boules sans remise dans cette urne.

Propriété (dénombrement des k-listes sans répétition) : Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leqslant n$.
Le nombre de k-listes sans répétition d'éléments de E, noté A_n^k, est

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ facteurs}}.$$

- **Remarque :** Une k-liste sans répétition d'un ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ est une application injective de $[\![1,k]\!]$ dans E.

Permutations

- **Définition (permutation) :** Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Une *permutation* de E est une n-liste sans répétition des n éléments de E.

  L'ensemble des permutations de E est noté $\mathfrak{S}(E)$.
- **Remarque :** Puisque $\mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}[\![1,n]\!]$, une permutation de E est une bijection f de $[\![1,n]\!]$ sur E. Ainsi, $\mathfrak{S}(E)$ est l'ensemble des bijections de $E^{[\![1,n]\!]}$.
- **Exemple :** Dénombrement des façons de placer six invités autour d'une table comportant six chaises.
- **Notation :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ sur lui-même, donc des permutations de $[\![1,n]\!]$, est noté $\mathfrak{S}_n$ (donc $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}([\![1,n]\!])$).
- **Propriété (cardinal de $\mathfrak{S}(E)$) :** Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
  Le nombre de permutations de E est égal à $n!$. En d'autres termes :

$$\mathrm{Card}\, \mathfrak{S}(E) = n!.$$

- **Exemple :** Anagrammes.

Combinaisons

- **Définition (combinaison) :** Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$.
Une *combinaison* de k éléments de E est une partie de E qui contient k éléments.
- **Définition (nombre de combinaisons à k éléments) :** Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$.
Le nombre de combinaisons de E composées de k éléments de E est noté $\binom{n}{k}$ (lire « k parmi n »).

Propriété (calcul des cœfficients binomiaux) : Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$. On a alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- **Exemple (combinaisons et probabilités) :** Déterminer la probabilité de l'événement « tirer 5 cartes contenant au moins un roi ».
- **Propriété (symétrie des cœfficients binomiaux) :** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$.
On a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Propriété (Relation de Pascal) : Soient un entier $n \geqslant 2$ et k un entier naturel tel que $k \in [\![1,n-1]\!]$. Nous disposons de la relation

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

- **Triangle de Pascal :** À chaque ligne n, le cœfficient binomial $\binom{n}{k}$ est le k-ième nombre de la ligne.

$n=0$	**1**
$n=1$	**1 1**
$n=2$	**1 2 1**
$n=3$	**1 3 3 1**
$n=4$	**1 4 6 4 1**
$n=5$	**1 5 10 5 1**
$n=6$	**1 6 15 15 6 1**
$\vdots$	$\vdots$

Binôme de Newton

Propriété (formule du binôme de Newton) : Soient a et b deux réels. Pour tout entier naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

- **Remarque :** Puisque $(a+b)^n = (b+a)^n$, la formule du binôme est symétrique par rapport aux réels a et b, c'est-à-dire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

- **Remarque :** Nous avons

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (a-b)^n = \big(a+(-b)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k.$$

- **Exemple (somme des cœfficients binomiaux) :** En appliquant la formule du binôme dans le cas particulier $a = b = 1$, on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

!

- Pour les parties désignées par un symbole

Propriété : une démonstration est exigible.

- Une colle comporte une question de cours choisie *a priori* parmi celles indiquées dans le programme de la semaine en cours (normalement, ± 15 min).
- Un cours non appris sera sanctionné par une note inférieure à 10 (même si l'exercice est fait correctement !).