TD 1 Notions de logique, ensembles

Notions de logique

Exercice 1 (★☆☆☆) Énoncer pour chaque proposition P qui suit, la proposition $(\neg P)$.

1. S'il pleut, je prends mon parapluie.
2. Chaque été, il pleut au moins une journée en Bretagne.
3. L'été dernier, il a plu tous les jours en Bretagne.
4. En Provence, il ne pleut jamais.
5. Dans la classe, il y a 16 filles et 18 garçon.
6. Dans la classe, il y a autant de filles que de garçons.

Exercice 2 (★★☆☆) Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$

Exercice 3 (★★☆☆) $\boxed{\textit{obligatoire}}$ Soient A, B, C et D des assertions. Démontrer les propositions suivantes (propriétés des connecteurs logiques) en utilisant les tables de vérité :

1. Associativité de « $\wedge$ » et « $\vee$ » :

$$A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C.$$

2. Transitivité de « $\implies$ » :

$$\big((A \implies B) \wedge (B \implies C)\big) \implies (A \implies C)$$

3. Distributivité de « $\wedge$ » sur « $\vee$ » :

$$\big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big) \implies \big(A \wedge (B \vee C)\big)$$

4. Distributivité de « $\vee$ » sur « $\wedge$ » :

$$\big(A \vee (B \wedge C)\big) \implies \big((A \vee B) \wedge (A \vee C)\big)$$

Exercice 4 (★☆☆☆) $\boxed{\textit{obligatoire}}$ Lois de De Morgan

Soient A et B deux assertions. Montrer que :

1. $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$
2. $\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$

Exercice 5 (★★☆☆) Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f s'annule au moins une fois.

2. La fonction f est la fonction nulle.

3. La fonction f est constante.

4. La fonction f est paire.

Exercice 6 (★★☆☆) Peut-on compléter les phrases suivantes par le symbole $\Rightarrow$? Le symbole $\Leftarrow$? Les réponses devront être rigoureusement justifiées.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 1) \ldots (e^x > 1)$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x > y) \ldots (x^2 > y^2)$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x = y) \ldots (\cos(x) = \cos(y))$

4. $\forall m \in \mathbb{N}$, (m pair) $\ldots$ (m multiple de 6)

5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (\cos(x) = \cos(y)) \ldots (x^2 = y^2)$

Ensembles

Exercice 7 (★★☆☆) Soit E un ensemble et X et Y deux sous-ensembles de E. Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = (X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y})$

2. $B = (X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y})$

3. $C = (X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) \cup (\overline{X} \cap Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y})$

4. $D = (X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y}) \cap (\overline{X} \cup Y) \cap (\overline{X} \cup \overline{Y})$

Exercice 8 (★★☆☆) Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. Comparer les ensembles suivants :

1. $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$;

2. $\mathcal{P}(A \setminus B)$ et $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

Exercice 9 (★★★★) Montrer les égalités suivantes :

1. $]-1;1[= \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{1+n}\ , 1 - \frac{1}{1+n}\right]$

2. $[-1;1] = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-1 - \frac{1}{1+n}\ , 1 + \frac{1}{1+n}\right[$.

Exercice 10 (★★★☆) Soit E un ensemble. Pour tous sous-ensembles A et B de E, on pose $A \nabla B = \overline{A \cup B}$.

1. Soit A un sous-ensemble de E. Exprimez $\overline{A}$ à l'aide de A et de l'opération ∇.

2. Soit A et B deux sous-ensembles de E, calculer et simplifier $(A \nabla A) \nabla (B \nabla B)$.

3. Soit A et B deux sous-ensembles de E. Exprimer $A \cup B$ et $A \cap B$ à l'aide de A, B et de la loi ∇ uniquement.

Remarque : cela signifie qu'il ne faut laisser ni union, ni intersection, ni complémentaire dans le résultat de cette question.
