Correction du TD 11 **Dérivation : compléments**

Exercice 1 (★☆☆☆) Q.C.M. *Pour chaque question de ce Q.C.M, il y a deux réponses exactes sur les 4 proposées.*

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) L'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f est égal à $[-1{,}1]$.

b) f est dérivable en 1.

c) L'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est $y = \sqrt{3}x - 1$.

d) La courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormé donné est un demi-cercle.

Réponses : a) et d).
- **a)** Vrai : $1 - x^2 \geqslant 0 \iff x \in [-1{,}1]$.
- **b)** Faux : $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$ (tangente verticale).
- **c)** Faux : $f(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2}$ et $f'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-2(\sqrt{3}/2)}{2(1/2)} = -\sqrt{3}$. L'équation est $y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3}(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) \iff y = -\sqrt{3}x + 2$.
- **d)** Vrai : $y = \sqrt{1-x^2} \implies y^2 + x^2 = 1$ avec $y \geqslant 0$.

2. On considère la fonction polynôme du troisième degré $P : x \longmapsto x^3 - 3x + 2$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a) $f(1) = f'(1) = 0$.

b) f est croissante sur l'intervalle $[-2{,}0]$.

c) $f(1)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

d) Le point $A(0{,}2)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

Réponses : a) et d). Calculs : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. $f''(x) = 6x$.
- **a)** Vrai : $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ et $f'(1) = 3 - 3 = 0$.
- **b)** Faux : f décroît sur $[-1{,}1]$, donc n'est pas croissante sur $[-2{,}0]$ entier.
- **c)** Faux : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
- **d)** Vrai : $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = 0$, et $f(0) = 2$.

Exercice 2 (★☆☆☆) Pour chacune des fonctions ci-après, déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée.

1. $a : x \longmapsto x^3\cos(5x+1)$

2. $b : x \longmapsto e^{\cos x}$

3. $c : x \longmapsto e^{x^3+2x^2+3x+4}$

4. $d : x \longmapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$

5. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$

6. $g : x \longmapsto \dfrac{\cos(2x)}{x^2-2}$

7. $h : x \longmapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$

1. $D_a = \mathbb{R}$. $a'(x) = 3x^2\cos(5x+1) - 5x^3\sin(5x+1)$.
2. $D_b = \mathbb{R}$. $b'(x) = -\sin(x)e^{\cos x}$.
3. $D_c = \mathbb{R}$. $c'(x) = (3x^2+4x+3)e^{x^3+2x^2+3x+4}$.
4. $D_d = \mathbb{R}$ (car $\Delta < 0$ pour le trinôme sous la racine). $d'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}e^{\sqrt{x^2+x+1}}$.
5. $D_f = \mathbb{R}$. $f'(x) = \dfrac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.
6. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. $g'(x) = \dfrac{-2\sin(2x)(x^2-2) - 2x\cos(2x)}{(x^2-2)^2}$.
7. $D_h = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. $h'(x) = \dfrac{1\sin(x) - x\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

Exercice 3 (★☆☆☆) Soient f et g deux fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $h = g \circ f$. Si $x \in \mathbb{R}$, donner une expression de $h''(x)$.

On a $h'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$. En dérivant un produit et une composée :

$$h''(x) = f''(x)g'(f(x)) + f'(x) \times [f'(x)g''(f(x))] = f''(x)g'(f(x)) + (f'(x))^2 g''(f(x)).$$

Exercice 4 (★☆☆☆) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Par récurrence. Pour $n = 0$, $\cos(x) = \cos(x)$.
Supposons la propriété vraie au rang n. Alors :

$$\cos^{(n+1)}(x) = \left(\cos^{(n)}\right)'(x) = \left(\cos(x + \frac{n\pi}{2})\right)' = -\sin(x + \frac{n\pi}{2}).$$

Or $-\sin(X) = \cos(X + \frac{\pi}{2})$, d'où :

$$\cos^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

Exercice 5 (★☆☆☆) Dérivée d'une fonction paire, impaire, périodique

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose f paire. Que dire de f' ?
2. Même question si f est impaire.
3. Même question si f est périodique de période T, où $T \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $f(-x) = f(x) \implies -f'(-x) = f'(x) \implies f'(-x) = -f'(x)$. f' est **impaire**.
2. $f(-x) = -f(x) \implies -f'(-x) = -f'(x) \implies f'(-x) = f'(x)$. f' est **paire**.
3. $f(x+T) = f(x) \implies f'(x+T) = f'(x)$. f' est **T-périodique**.

Exercice 6 (★☆☆☆) Recherche de maximum

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Calculer le maximum de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n-x).$$

Sur $\mathbb{R}_+$, $f_n'(x)$ est du signe de $n-x$. f_n est croissante sur $[0,n]$ et décroissante sur $[n,+\infty[$. Le maximum est atteint en n :

$$\max(f_n) = f_n(n) = n^n e^{-n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Exercice 7 (★★☆☆) Dérivées d'ordre n

Déterminer les dérivées d'ordre n (où $n \in \mathbb{N}^*$) des fonctions f et g suivantes :

1. $f : x \longmapsto xe^x$.

2. $g = \sin$.

1. Formule de Leibniz avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$. Comme $u^{(k)} = 0$ pour $k \geq 2$:

$$f^{(n)}(x) = x(e^x)^{(n)} + n(1)(e^x)^{(n-1)} = xe^x + ne^x = (x+n)e^x.$$

2. Comme pour le cosinus : $g^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Exercice 8 (★★☆☆) Fonctions à dérivée n-ième nulle

Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée n-ième est identiquement nulle.

Ce sont les fonctions polynomiales de degré au plus $n-1$.

Exercice 9 (★★☆☆) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le maximum de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

Voir exercice 6 (identique). Le maximum est $(n/e)^n$, atteint en $x = n$.

Exercice 10 (★★☆☆) Pendule simple

Soient un pendule simple de masse m et de longueur ℓ, θ l'angle que fait le pendule avec la « verticale descendante » ; alors θ dépend du temps t et obéit à l'équation différentielle :

$$\theta''(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)) = 0.$$

L'énergie du pendule au temps t est donnée par la formule :

$$E(t) = \frac{m\ell^2\theta'(t)^2}{2} - mg\ell\cos(\theta(t)).$$

Montrer que E est constante (conservation de l'énergie).

On dérive E par rapport au temps t :

$$E'(t) = \frac{m\ell^2}{2} \cdot 2\theta'(t)\theta''(t) - mg\ell(-\sin(\theta(t)) \cdot \theta'(t))$$

$$E'(t) = m\ell^2\theta'(t)\left[\theta''(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta(t))\right]$$

Or, d'après l'équation différentielle, le terme entre crochets est nul. Donc $E'(t) = 0$, et E est constante.

Exercice 11 (★★★☆) Dérivée n-ième de $x \longmapsto x^2e^x$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^x$.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (x^2 + a_nx + b_n)e^x.$$

2. Expliciter $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et x.

1. On dérive : $f^{(n+1)}(x) = (2x+a_n)e^x+(x^2+a_nx+b_n)e^x = (x^2+(a_n+2)x+(a_n+b_n))e^x$. On a les récurrences $a_{n+1} = a_n+2$ et $b_{n+1} = a_n+b_n$, avec $a_0 = 0$,$b_0 = 0$ (ou $n = 1$ directement).

2. Plus simple avec Leibniz : $f^{(n)}(x) = x^2(e^x)^{(n)} + n(2x)(e^x)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}(2)(e^x)^{(n-2)}$.

$$f^{(n)}(x) = e^x\left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right).$$

Donc $a_n = 2n$ et $b_n = n(n-1)$.

Exercice 12 (★★★☆) Limites et taux d'accroissement

Soit f une fonction dérivable en a appartenant à un intervalle ouvert I.

1. Calculer la limite quand h tend vers 0 des fonctions suivantes :

a) $h \longmapsto \dfrac{(a+h)f(a) - af(a+h)}{h}$.

b) $h \longmapsto \dfrac{(a+nh)f(a) - af(a+h)}{h}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Calculer la limite quand x tend vers a de la fonction

$$x \longmapsto \frac{e^{-a}f(x) - e^{-x}f(a)}{x-a}.$$

1. **a)** $\frac{af(a)+hf(a)-af(a+h)}{h} = f(a) - a\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(a) - af'(a)$.

b) De même : $\frac{af(a)+nhf(a)-af(a+h)}{h} = nf(a) - a\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} nf(a) - af'(a)$ (Attention ici le terme variable $f(a+h)$ est le même, seul le coeff devant $f(a)$ change). *Correction du raisonnement pour b) si c'était $f(a+nh)$: ce serait $f(a) - naf'(a)$. Ici l'énoncé est bien $(a+nh)f(a)$.*

2. On reconnaît le taux d'accroissement de $g(x) = e^{-x}f(x)$ en a. $g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x)$. Donc la limite est $g'(a) = e^{-a}(f'(a) - f(a))$.

Exercice 13 (★★★☆) Dérivée de la bijection réciproque

Soient I et J deux intervalles ouverts non vides. Soit f une bijection de I sur J où $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est la bijection réciproque de f. Montrer que si f est dérivable sur I et que si, de plus, f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\forall y \in J, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}.$$

On part de l'identité $\forall y \in J, f(f^{-1}(y)) = y$. f est dérivable et f^{-1} est continue (admis pour une bijection sur un intervalle). En dérivant la composée : $(f^{-1})'(y) \times f'(f^{-1}(y)) = 1$. Comme f' ne s'annule pas, on peut diviser : $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Exercice 14 (★★★★) Méthode de la sécante

Soient deux réels a et b tels que $a < b$. On considère une fonction f continue, croissante strictement et convexe sur $[a,b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$. On désigne par A et B les deux points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et b.

1. Justifier l'existence d'un unique réel $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
2. Déterminer une équation de la droite (AB).
3. En déduire que l'abscisse x_1 du point d'intersection de la sécante (AB) avec la droite des abscisses satisfait à
$$x_1 = a - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f(a).$$
4. En réitérant ce procédé, nous considérons la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $x_0 = a$ et la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n).$$
En utilisant la convexité de la fonction f, prouver que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \leqslant \alpha.$$
En déduire le sens de variation de la suite (x_n).
5. Justifier que (x_n) converge vers le réel α.
6. Nous supposons que $f : x \longmapsto x^3 - 4x - 2$. Proposer un algorithme qui restitue une valeur approchée d'une solution $a \in [2,3]$ de l'équation $f(x) = 0$.

1. f est continue et strictement croissante, $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. D'après le théorème de la bijection (ou TVI strict), il existe un unique $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
2. Pente $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Équation : $y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$.
3. On cherche x_1 tel que $y = 0$: $-f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_1 - a) \iff x_1 - a = -f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$. D'où le résultat.
4. **Position :** f est convexe, donc sa courbe est située au-dessous de ses sécantes. Sur $[x_n,b]$, la corde (M_nB) est au-dessus de $\mathcal{C}_f$. Comme f est croissante et $f(b) > 0$, la corde coupe l'axe des abscisses en un point x_{n+1} situé *avant* le point où la courbe coupe l'axe (qui est α). Donc $x_{n+1} \leq \alpha$. Par récurrence, $x_n \leq \alpha$. **Variation :** f croissante et $x_n \leq \alpha \implies f(x_n) \leq 0$. Or $x_{n+1} - x_n = -f(x_n)\frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)}$. Le ratio est positif (car $b > x_n$ et $f(b) > f(x_n)$), et $-f(x_n) \geq 0$. Donc $x_{n+1} \geq x_n$. La suite est **croissante**.
5. (x_n) est croissante et majorée par α, donc elle converge vers $\ell \in]a,\alpha]$. En passant à la limite dans la récurrence, on obtient $f(\ell) = 0$, donc $\ell = \alpha$.
6. Algorithme classique de la sécante (ou *regula falsi*).

Exercice 15 (★★★★) Méthode de Newton

Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I. Soient $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$. Nous supposons :

— $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$,

— $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]a,b[$.

2. **a)** Soit $\mathcal{T}_0$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au points M_0 d'abscisse $x_0 = b$. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection de $\mathcal{T}_0$ avec la droite des abscisses.

b) Soit $\mathcal{T}_1$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M_1 d'abscisse x_1. Déterminer l'abscisse x_2 du point d'intersection de $\mathcal{T}_1$ avec la droite des abscisses.

3. En réitérant ce processus, pour tout entier naturel n, nous désignons par :

— $\mathcal{T}_n$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point M_n d'abscisse x_n,

— x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{T}_n$ avec la droite des abscisses.

Montrer que, le réel $x_0 = b$ étant donné, la suite (x_n) est définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

4. **a)** Justifier que la suite (x_n) est minorée par α.

b) Quel est le sens de variation de cette suite ?

c) La suite (x_n) converge vers le réel α. Expliquez pourquoi.

1. f strictement croissante ($f' > 0$) et continue sur $[a,b]$, change de signe. TVI strict $\implies$ unique α.

2. Équation tangente en x_n : $y = f'(x_n)(x-x_n)+f(x_n)$. Intersection axe des abscisses ($y = 0$) : $0 = f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)+f(x_n) \implies x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Cela prouve la question 3 directement par récurrence.

3. (Voir ci-dessus).

4. **a)** f est convexe ($f'' > 0$), donc sa courbe est au-dessus de ses tangentes. Ainsi $0 = f(x_{n+1}) + (\dots) \implies f(x_{n+1}) \geq 0$ (par position relative tangente/courbe, l'annulation de la tangente se fait "avant" l'annulation de la courbe). Plus rigoureusement : $f(x) \geq f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. En $x = x_{n+1}$, le membre de droite est nul. Donc $f(x_{n+1}) \geq 0 = f(\alpha)$. Comme f croissante, $x_{n+1} \geq \alpha$.

b) $x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Comme $x_n \geq \alpha$, $f(x_n) \geq 0$. Et $f' > 0$. Donc $x_{n+1} - x_n \leq 0$. La suite est **décroissante**.

c) Décroissante et minorée par α, elle converge vers ℓ. Les limites donnent $\ell = \ell - f(\ell)/f'(\ell) \implies f(\ell) = 0 \implies \ell = \alpha$.

Exercice 16 (★★★★) La fonction sinus cardinal

La fonction sinus cardinal, notée ici sinc, est définie par :

$$\begin{cases} \mathrm{sinc}(0) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}. \end{cases}$$

1. Étudier la parité de sinc.

2. Montrer que sinc est continue en 0. Quelle est sa limite en $\pm\infty$?

3. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, calculer $\mathrm{sinc}'(x)$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction tan admet un unique point fixe sur l'intervalle $\left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ que l'on note x_n.

5. Montrer que les x_n pour $n \in \mathbb{Z}$ sont les points en lesquels sinc' s'annule.

1. $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \text{sinc}(x)$. Fonction **paire**.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \text{sinc}(0)$ (taux d'accroissement du sinus). Continue. En $\pm\infty$, $|\text{sinc}(x)| \leq 1/|x| \to 0$.
3. $\text{sinc}'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.
4. Sur $I_n =]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$, la fonction $x \mapsto \tan x - x$ est strictement croissante (dérivée $\tan^2 x > 0$). Limites $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes. Unique zéro x_n (bijection).
5. $\text{sinc}'(x) = 0 \iff x\cos x = \sin x \iff x = \tan x$ (pour $\cos x \neq 0$, ce qui est vrai aux points d'annulation car sinon $\sin x = 0$ et $x = 0$, mais ici on est sur $\mathbb{R}^*$). 0 est aussi solution de $x\cos x - \sin x = 0$.

Exercice 17 (★★★★) Inégalités des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, avec $a < b$.

1. Nous supposons qu'il existe deux réels m et M tels que $\forall\, x \in]a,b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$. Prouver que $m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$.
2. *Une application.* Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
3. Nous supposons qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall\, x \in]a,b[, \quad |f'(x)| \leqslant k$. Montrer que $|f(b)-f(a)| \leqslant k(b-a)$.
4. *Une application.* Justifier que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|$.

1. C'est l'Inégalité des Accroissements Finis (IAF). On applique le TAF : il existe $c \in]a,b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Or $m \leq f'(c) \leq M$.
2. On pose $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[n,n+1]$. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Pour $x \in [n,n+1]$, f' décroît, donc $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$. On applique le 1.
3. Corollaire immédiat du 1 avec $m = -k$ et $M = k$. $-k \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq k \iff \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq k$.
4. On applique à $f(t) = \sin t$ sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$). $|f'(t)| = |\cos t| \leq 1$. Donc $|\sin x - \sin 0| \leq 1 \cdot |x - 0| \implies |\sin x| \leq |x|$.

Exercice 18 (★★★★) Méthode du point fixe

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle $]a,b[$. Nous supposons

— $\forall\, x \in [a,b], \quad f(x) \in [a,b]$.

— $\exists\, k \in]0,1[, \forall\, x \in]a,b[, \quad |f'(x)| \leqslant k$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [a,b]$.
2. On considère la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $x_0 \in [a,b]$ et par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Justifier que, pour tout entier naturel n,
   a) $x_n \in [a,b]$.
   b) $|x_{n+1} - \alpha| < k|x_n - \alpha|$.
3. En déduire $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \alpha| \leqslant k^n |x_0 - \alpha|$. La suite (x_n) converge-t-elle ?

1. **Existence :** Posons $g(x) = f(x) - x$. $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. TVI $\implies$ existence. **Unicité :** Si $f(x) = x$ et $f(y) = y$, alors $|x-y| = |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$. Comme $k < 1$, cela impose $|x - y| = 0$.
2. **a)** Par récurrence immédiate car $f([a,b]) \subset [a,b]$.
   b) D'après l'IAF : $|f(x_n) - f(\alpha)| \leq k|x_n - \alpha|$ car $|f'| \leq k$. Or $f(\alpha) = \alpha$.
3. Par récurrence : $|x_n - \alpha| \leq k|x_{n-1} - \alpha| \leq \cdots \leq k^n|x_0 - \alpha|$. Comme $0 < k < 1$, $\lim k^n = 0$,

donc $x_n \to \alpha$.

Exercice 19 (★★★★) **Méthode du point fixe. Étude d'un exemple**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

1. Justifier que $\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

3. Prouver que, pour tout réel $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant k$, en posant $k = \dfrac{\sqrt{e}}{(\sqrt{e}+1)^2}$.

4. Étude de la convergence de $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. f est strictement croissante ($f' > 0$). $f(1/2) \approx 0.62 \geq 0.5$ et $f(1) \approx 0.73 \leq 1$. Donc l'intervalle est stable.

2. Résulte de l'exercice précédent (stabilité + dérivée bornée strictement par 1 ? À vérifier au 3).

3. $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$. f'' s'annule en 0 et est négative sur $[1/2, 1]$. Donc f' est décroissante sur cet intervalle. Le max de f' est en $1/2$: $f'(1/2) = \frac{e^{0.5}}{(1+e^{0.5})^2} = \frac{\sqrt{e}}{(1+\sqrt{e})^2} \approx 0.23$. On a bien $|f'| \leq k \approx 0.23 < 1$.

4. Les hypothèses de l'exercice précédent sont vérifiées. La suite converge vers α.
