T$^{\text{ale}}$ spé Maths expertes
J. Bérard

Lycée Saint-Augustin

2025–2026

Correction du TD 12
Fonction logarithme népérien

Exercice 1 (★☆☆☆) Q.C.M.

Pour chaque question de ce Q.C.M, il y a deux réponses exactes sur les 4 proposées.

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(e^x - 2)$ et on note $\mathscr{D}$ son ensemble de définition.

a) $\mathscr{D} = \left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right[$.

b) $\ln 2$ est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathscr{D}$.

c) f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et

$$\forall x \in \mathscr{D}, \quad f'(x) = \frac{1}{1 - 2e^{-x}}.$$

d) $\forall x \in \mathscr{D}$, $f(x) < x$.

Réponses : c) et d).

— **a)** Faux : $\mathscr{D}$ nécessite $e^x - 2 > 0 \iff x > \ln 2$. Donc $\mathscr{D} =]\ln 2, +\infty[$.

— **b)** Faux : $f(x) = 0 \iff e^x - 2 = 1 \iff e^x = 3 \iff x = \ln 3$.

— **c)** Vrai : $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 2}$. En divisant numérateur et dénominateur par e^x, on obtient $f'(x) = \dfrac{1}{1 - 2e^{-x}}$.

— **d)** Vrai : $f(x) < x \iff \ln(e^x - 2) < x \iff e^x - 2 < e^x \iff -2 < 0$, ce qui est toujours vrai.

2. On considère la fonction $g : x \longmapsto \ln\left(x^2 - 4x + 3\right)$. On note $\mathscr{D}$ son ensemble de définition et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

a) $\mathscr{D} =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$.

b) La droite $\Delta : x = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

c) $\forall x \in \mathscr{D}$, $g(x) = \ln(x - 1) + \ln(x - 3)$.

d) $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} g(x)$.

Réponses : a) et d).

— **a)** Vrai : Le trinôme $x^2 - 4x + 3$ a pour racines 1 et 3. Il est strictement positif à l'extérieur des racines.

— **b)** Faux : Les asymptotes verticales sont $x = 1$ et $x = 3$. La droite $x = 2$ est un axe de symétrie, mais pas une asymptote (la fonction n'y est pas définie).

— **c)** Faux : Cette égalité n'est vraie que si $x - 1 > 0$ et $x - 3 > 0$, c'est-à-dire sur $]3, +\infty[$. Sur $]-\infty, 1[$, on a $g(x) = \ln(1 - x) + \ln(3 - x)$.

— **d)** Vrai : Dans les deux cas, le trinôme tend vers 0^+, donc par composition, la limite de $g(x)$ est $-\infty$.

Exercice 2 (★☆☆☆) Résoudre chacune des équations suivantes après avoir précisé leur ensemble de validité.

1. $\ln x = 3$
2. $\ln x = -1$
3. $\ln(2x-1) = 1$
4. $\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln 6$
5. $(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$

1. Validité : $\mathscr{D} =]0, +\infty[$.
   $\ln x = 3 \iff x = e^3$.
   $\boxed{\mathcal{S} = \{e^3\}.}$
2. Validité : $\mathscr{D} =]0, +\infty[$.
   $\ln x = -1 \iff x = e^{-1}$.
   $\boxed{\mathcal{S} = \{e^{-1}\}.}$
3. Validité : $2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$. $\mathscr{D} = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

   $\ln(2x-1) = 1 \iff 2x - 1 = e \iff x = \dfrac{e+1}{2}$.

   $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{e+1}{2}\right\}.}$
4. Validité : $x + 3 > 0$ et $x - 2 > 0 \iff x > 2$. $\mathscr{D} =]2, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln 6 &\iff \ln((x+3)(x-2)) = \ln 6 \\ &\iff x^2 + x - 6 = 6 \\ &\iff x^2 + x - 12 = 0. \end{aligned}$$

   Les racines sont -4 et 3. Seule 3 appartient à $\mathscr{D}$.
   $\boxed{\mathcal{S} = \{3\}.}$
5. Validité : $\mathscr{D} =]0, +\infty[$.
   On pose $X = \ln x$. L'équation devient $X^2 - 5X + 6 = 0$, dont les solutions sont $X = 2$ et $X = 3$.
   On a donc $\ln x = 2 \implies x = e^2$ ou $\ln x = 3 \implies x = e^3$.
   $\boxed{\mathcal{S} = \{e^2, e^3\}.}$

Exercice 3 (★☆☆☆) Résoudre chacune des inéquations suivantes après avoir précisé leur ensemble de validité.

1. $\ln x > 2$
2. $\ln \dfrac{1}{x} > 2$
3. $\ln^2 x - 4 > 0$

1. Validité : $\mathscr{D} =]0, +\infty[$.
   $\ln x > 2 \iff x > e^2$.
   $\boxed{\mathcal{S} =]e^2, +\infty[.}$
2. Validité : $\mathscr{D} =]0, +\infty[$.
   $\ln(1/x) > 2 \iff -\ln x > 2 \iff \ln x < -2 \iff x < e^{-2}$.
   $\boxed{\mathcal{S} =]0, e^{-2}[.}$
3. Validité : $\mathscr{D} =]0, +\infty[$.
   $\ln^2 x - 4 > 0 \iff (\ln x - 2)(\ln x + 2) > 0$. Le polynôme $X^2 - 4$ est positif à l'extérieur de ses racines -2 et 2.
   Donc $\ln x < -2 \implies x < e^{-2}$ ou $\ln x > 2 \implies x > e^2$.

$$\boxed{\mathcal{S} =]0,e^{-2}[\cup]e^2,+\infty[.}$$

Exercice 4 (★★☆☆) Limite d'un taux d'accroissement

Montrer que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Soit la fonction $u \left| \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) \end{array} \right.$.

La focntion u est dérivable sur son domaine de définition et

$$\forall\, x \in]-1,+\infty[, \quad u'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Le quotient $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{u(x)-u(0)}{x-0}$ correspond au taux d'accroissement de u en 0.

Sa limite quand $x \longrightarrow 0$ est donc le nombre dérivé $u'(0) = \dfrac{1}{1+0} = 1$.

D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.}$$

Exercice 5 (★★☆☆)

1. Étudier la limite en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :
   - **a)** $f : x \longmapsto x - \ln x$.
   - **b)** $g : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2+1}$.
2. Étudier la limite en 0 de la fonction $h : x \longmapsto x\ln(2x)$.

1. a) Il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ». On factorise par x :

$$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right).$$

Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Donc par produit

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

b) On a, pour $x > 0$:

$$g(x) = \frac{\ln x}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$. Par produit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$$

2. On pose $X = 2x$. On a donc $X \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$h(x) = \frac{1}{2}(2x\ln(2x)) = \frac{1}{2}X\ln X.$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{X \to 0^+} X \ln X = 0$. Donc :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} h(x) = 0.}$$

Exercice 6 (★★☆☆) Étude d'une fonction du type $\ln(u)$

Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

▷ **Ensemble de définition :**
La fonction f est définie si et seulement si $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$.
Une étude des signes du numérateur et du dénominateur donne :

- $1 + x > 0 \iff x > -1$
- $1 - x > 0 \iff x < 1$

Le quotient est donc strictement positif sur l'intervalle $]-1{,}1[$.
Nous en concluons que l'ensemble de définition est :

$$\boxed{\mathscr{D} =]-1{,}1[.}$$

▷ **Dérivée et variations :**
Sur $\mathscr{D}$, la fonction f est dérivable par composition. Elle est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$.
La fonction u est dérivable par quotient sur $\mathscr{D}$ et nous avons :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1 \times (1-x) - (-1) \times (1+x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - x + 1 + x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons la dérivée de f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} \\ &= \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} \\ &= \frac{2}{(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{2}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]-1{,}1[$, nous avons $x^2 < 1$, ce qui implique $1 - x^2 > 0$.
Puisque le numérateur est également strictement positif, nous obtenons :

$$\forall x \in]-1{,}1[, \quad f'(x) > 0.$$

$\boxed{\text{Nous en concluons que la fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]-1{,}1[.}$

Exercice 7 (★★☆☆) Logarithme décimal

La fonction logarithme décimal notée log (ou encore $\log_{10}$) est la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$ par

$$\log(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

1. Donner les valeurs de $\log(1), \log(10)$.

2. Montrer que pour tous réels strictement positifs a et b, on a la propriété algébrique fondamentale :

$$\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$$

3. Déterminer la valeur de $\log\left(10^n\right)$ lorsque n est un entier relatif.

1. En utilisant la définition et sachant que $\ln(1)=0$, nous obtenons :

$$\log(1)=\frac{\ln(1)}{\ln(10)}=\frac{0}{\ln(10)} \implies \boxed{\log(1)=0.}$$

De même, puisque $\ln(10)$ est au numérateur et au dénominateur :

$$\log(10)=\frac{\ln(10)}{\ln(10)} \implies \boxed{\log(10)=1.}$$

2. Soient a et b deux réels appartenant à $]0,+\infty[$. En utilisant la propriété algébrique du logarithme népérien ($\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$), il vient :

$$\begin{aligned}\log(a\times b)&=\frac{\ln(a\times b)}{\ln(10)}\\&=\frac{\ln(a)+\ln(b)}{\ln(10)}\\&=\frac{\ln(a)}{\ln(10)}+\frac{\ln(b)}{\ln(10)}\\&=\log(a)+\log(b).\end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré la propriété fondamentale :

$$\boxed{\forall\, a>0,\ \forall\, b>0,\quad \log(a\times b)=\log(a)+\log(b).}$$

3. Soit un entier relatif $n\in\mathbb{Z}$. Nous connaissons la propriété $\ln\left(10^n\right)=n\ln(10)$. Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\log\left(10^n\right)&=\frac{\ln\left(10^n\right)}{\ln(10)}\\&=\frac{n\ln(10)}{\ln(10)}\\&=n.\end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{Z},\quad \log\left(10^n\right)=n.}$$

Exercice 8 (★★☆☆) Fonction exponentielle de base a

Soit a un réel strictement positif fixé.

1. Montrer que, pour tout couple (x,y) de réels, on a :

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

2. Dresser, en fonction des valeurs du paramètre réel a, le tableau de variation de la fonction $\exp_a$.

Rappel de la définition : pour tout $a > 0$, la fonction $\exp_a$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$.

1. Soient x et y deux réels. En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, nous obtenons :

$$\begin{aligned} a^x \times a^y &= e^{x \ln a} \times e^{y \ln a} \\ &= e^{x \ln a + y \ln a} \\ &= e^{(x+y) \ln a} \\ &= a^{x+y}. \end{aligned}$$

Nous en concluons :
$$\boxed{\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad a^x \times a^y = a^{x+y}.}$$

2. La fonction $f : x \longmapsto e^{x \ln a}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition avec la fonction affine $x \longmapsto x \ln a$. Pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x) = (\ln a) e^{x \ln a}.$$

Puisque pour tout réel X, $e^X > 0$, le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe de la constante $\ln a$. Par disjonction, nous distinguons trois cas :

- **1er cas : $a > 1$.**
  Dans ce cas, $\ln a > 0$, ce qui implique $f'(x) > 0$.
  $\boxed{\text{La fonction } \exp_a \text{ est } \textbf{strictement croissante} \text{ sur } \mathbb{R}.}$ Ses limites sont $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.
- **2e cas : $0 < a < 1$.**
  Dans ce cas, $\ln a < 0$, ce qui implique $f'(x) < 0$.
  $\boxed{\text{La fonction } \exp_a \text{ est } \textbf{strictement décroissante} \text{ sur } \mathbb{R}.}$ Les limites s'inversent : $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$.
- **3e cas : $a = 1$.**
  Dans ce cas, $\ln 1 = 0$, ce qui implique $f'(x) = 0$.
  $\boxed{\text{La fonction } \exp_1 \text{ est } \textbf{constante} \text{ et égale à 1 sur } \mathbb{R}.}$

Exercice 9 (★★☆☆) Une bijection

1. Quel est l'ensemble de définition D_g de la fonction $g : x \longmapsto \ln(1 - \ln x)$?

2. Montrer que g est une bijection de D_g sur un intervalle I que l'on précisera.

3. Soit un réel $b \in I$. Résoudre dans D_g l'équation $g(x) = b$.
En déduire la fonction réciproque de g, c'est-à-dire la fonction notée g^{-1} qui associe à chaque réel $b \in I$ l'unique solution x de l'équation $g(x) = b$.

4. Définir les fonctions $g \circ g^{-1}$ et $g^{-1} \circ g$.

5. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $h : x \longmapsto g(|x|)$? Cette fonction est-elle une bijection ?

1. La fonction g est définie si et seulement si

$$x > 0 \text{ et } 1 - \ln x > 0 \iff x > 0 \text{ et } \ln x < 1 \iff 0 < x < e.$$

Nous en concluons que

$$\boxed{D_g =]0,e[.}$$

2. La fonction g est, par composition, dérivable sur $]0,e[$. Pour tout réel $x \in]0,e[$, en posant $u(x) = 1 - \ln x$, nous obtenons

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)\ln'(u(x)) \\ &= \frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= -\frac{1}{x} \times \frac{1}{1-\ln x} \\ &= -\frac{1}{x(1-\ln x)} < 0. \end{aligned}$$

Par conséquent la fonction g est strictement décroissante sur $]0,e[$.

> *Remarque : le sens de variation de g peut être justifié sans argument de dérivation. En effet, la fonction $\ln$ est croissante strictement sur $]0,e[$, ce qui implique :*
>
> $$x \longmapsto 1 - \ln x \textit{ est décroissante strictement sur }]0,e[.$$
>
> *Sachant que*
>
> $$\forall\, x \in]0,e[, \quad 1 - \ln x \in]0, +\infty[,$$
>
> *par composition de $\ln$ croissante strictement sur $]0,+\infty[$ avec $x \longmapsto 1 - \ln x$ décroissante strictement sur $]0,e[$, la fonction g est décroissante strictement sur $]0,e[$.*

De plus cette fonction est continue sur $]0,e[$ car dérivable sur cet intervalle.
Par théorème de la bijection, il en résulte que g est une bijection de $]0,e[$ sur

$$f\left(]0,e[\right) = \left] \lim_{x\to e^-} g(x), \lim_{x\to 0^+} g(x) \right[.$$

- ▷ Limite en 0 à droite de g.
  Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 - \ln x = +\infty$, par composition, en posant $X = 1 - \ln x$, nous en déduisons

  $$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{X\to +\infty} \ln X = +\infty.$$

- ▷ Limite en e à gauche de g.
  Puisque $\lim\limits_{x\to e^-} 1 - \ln x = 0^+$, par composition, en posant $X = 1 - \ln x$, nous en déduisons

  $$\lim_{x\to e^-} g(x) = \lim_{X\to 0^+} \ln X = -\infty.$$

$\boxed{\text{Nous en concluons que } g \text{ est une bijection de }]0,e[\text{ sur } \mathbb{R}.}$

3. Soit un réel b quelconque. Il vient

$$\begin{aligned} g(x) = b &\iff \ln(1 - \ln x) = b \\ &\iff 1 - \ln x = e^b \\ &\iff \ln x = 1 - e^b \\ &\iff x = \exp\left(1 - e^b\right). \end{aligned}$$

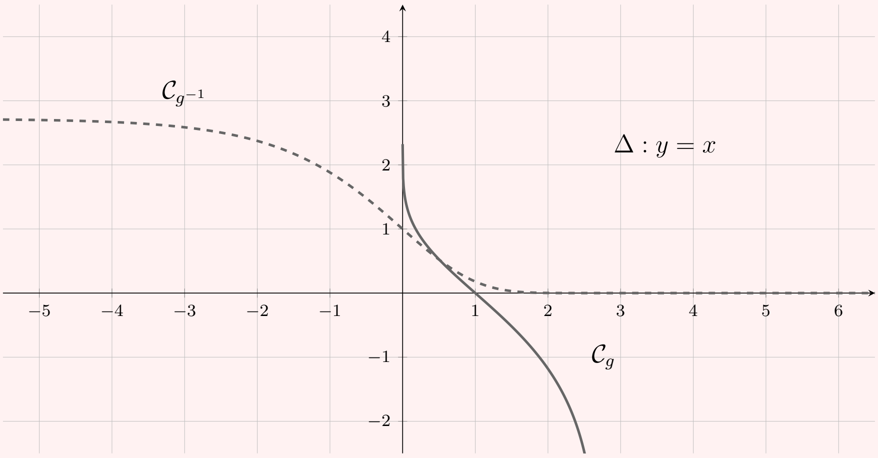
Nous définissons ainsi sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$g^{-1} : b \longmapsto \exp\left(1 - e^b\right)$$

ce qui donne, en changeant b en x,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g^{-1}(x) = \exp\left(1 - e^{x}\right).$$

Nous observons que les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice Δ du repère orthonormal choisi.



4. Pour tout réel x, nous avons

$$\begin{aligned}
\left(g \circ g^{-1}\right)(x) &= g\left(g^{-1}(x)\right) \\
&= \ln\left(1 - \ln\left(g^{-1}(x)\right)\right) \\
&= \ln\left(1 - \ln\left(\exp\left(1 - e^{x}\right)\right)\right) \\
&= \ln\left(1 - \left(1 - e^{x}\right)\right) \\
&= \ln\left(e^{x}\right) = x
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout réel $x \in]0,e[$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left(g^{-1} \circ g\right)(x) &= g^{-1}(g(x)) \\
&= \exp\left(1 - e^{g(x)}\right) \\
&= \exp\left(1 - e^{\ln(1-\ln x)}\right) \\
&= \exp(1 - (1 - \ln x)) \\
&= \exp(\ln x) = x
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad g^{-1} \circ g = \mathrm{Id}_{]0,e[}}$$

5. La fonction h est définie si et seulement si $|x| \in D_g$, donc $0 < |x| < e$, soit $x \in]-e,e[\setminus \{0\}$. Nous en concluons que

$$\boxed{D_h =]-e,0[\cup]0,e[.}$$

Nous observons que $-1 \in D_h$ et $1 \in D_h$, avec

$$h(-1) = g(|-1|) = g(|1|) = h(1) = 0.$$

Ainsi 0 admet deux antécédents 1 ou -1 par h, ce qui prouve que h n'est pas injective.

$\boxed{\text{Donc } h \text{ n'est pas une bijection.}}$

Exercice 10 (★★☆☆) $\boxed{\textit{obligatoire}}$ **Encadrement de $x \longmapsto \ln(1+x)$ par des polynômes**

Pour tout réel $x \in [0, +\infty[$, prouver successivement les deux encadrements

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x \tag{1}$$

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \tag{2}$$

Encadrement (1).
Pour tout réel $x \geqslant 0$, nous posons

$$f(x) = x - \ln(1+x) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right).$$

- ▷ Variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$.
  Cette fonction est, par composition et différence, dérivable sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \geqslant 0$, nous avons

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{x}{1+x} \geqslant 0. \end{aligned}$$

  La fonction f est donc croissante sur $[0, +\infty[$. Puisque $f(0) = 0$, nous en déduisons

$$x \geqslant 0 \implies f(x) \geqslant f(0), \quad \text{soit } f(x) \geqslant 0.$$

  ce qui justifie

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

- ▷ Variations de la fonction g sur $[0, +\infty[$.
  Cette fonction est, par composition et différence, dérivable sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \geqslant 0$, nous avons

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} - (1-x) \\ &= \frac{1 - \left(1 - x^2\right)}{1+x} \\ &= \frac{x^2}{1+x} \geqslant 0. \end{aligned}$$

  La fonction g est donc croissante sur $[0, +\infty[$.
  Puisque $g(0) = 0$, nous en déduisons

$$x \geqslant 0 \implies g(x) \geqslant h(0), \quad \text{soit } g(x) \geqslant 0.$$

  ce qui justifie

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x).$$

Nous en concluons l'encadrement (1) :

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.}$$

Encadrement (2).
Pour tout réel $x \geqslant 0$, nous posons

$$h(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x).$$

Cette fonction est, par composition et différence, dérivable sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \geqslant 0$, nous avons

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{\left(1 - x + x^2\right)(1+x) - 1}{1+x} \\ &= \frac{x^3}{1+x} \geqslant 0. \end{aligned}$$

La fonction h est donc croissante sur $[0, +\infty[$.
Puisque $h(0) = 0$, nous en déduisons

$$x \geqslant 0 \implies h(x) \geqslant h(0), \quad \text{soit } h(x) \geqslant 0,$$

ce qui justifie

$$\forall\, x \in [0, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Nous en concluons l'encadrement (2) :

$$\boxed{\forall\, x \in [0, +\infty[, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.}$$

Exercice 11 (★★☆☆) Dérivabilité en 0

Étudier la dérivabilité en 0, à droite, de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour tout réel $x > 0$, nous avons

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

En 0 à droite, nous observons une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ». Pour lever cette indétermination, nous employons, pour $x > 0$, l'encadrement (2) de l'exercice précédent.
Comme $x^2 > 0$, il vient successivement :

$$\begin{aligned} x - \frac{x^2}{2} &\leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \\ -\frac{x^2}{2} &\leqslant \ln(1+x) - x \leqslant -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \\ -\frac{1}{2} &\leqslant \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leqslant -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$$

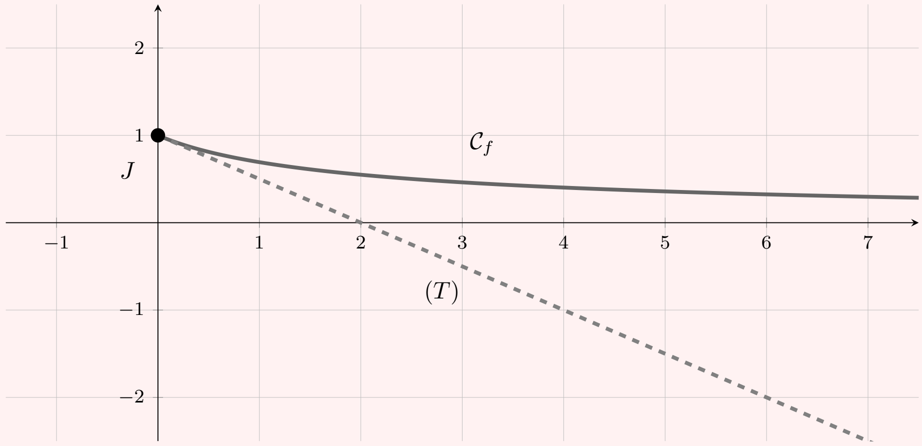
par encadrement, nous obtenons

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$$

Nous en concluons que f est dérivable à droite en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
Plus précisément le nombre dérivé à droite en 0 est $f'_d(0) = -\dfrac{1}{2}$.
Nous contrôlons graphiquement que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point $J(0,1)$ une demi-tangente de coefficient directeur $-\dfrac{1}{2}$:



Exercice 12 (★★☆☆) Limite d'un produit

Nous considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Nous posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$.

1. En utilisant l'encadrement (1) établi lors de l'exercice **10** de ce paragraphe, montrer que la suite (v_n) converge.

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

1. Soit un entier naturel $n \geqslant 1$.
Nous remarquons préalablement que, $u_n > 0$. Nous avons

$$v_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

Pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, en appliquant l'encadrement (1) obtenu à l'exercice **10**, en particulier pour $x = \dfrac{k}{n^2}$, il vient

$$\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \leqslant \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2}$$

En additionnant membres à membres, pour k variant de 1 à n, nous obtenons successivement

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

nous en déduisons

$$\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{2n^4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\leqslant v_n\leqslant\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

ce qui donne, après simplification

$$\frac{(n+1)}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^3}\leqslant v_n\leqslant\frac{(n+1)}{2n}$$

Comme, pour tout entier $n\geqslant 1$, nous avons

$$\frac{(n+1)}{2n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\text{ et }\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6n},$$

il en résulte

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)}{2n}=\frac{1}{2}\text{ et }\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^3}=0.$$

Ainsi, par encadrement, nous en concluons que la suite (v_n) converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{1}{2}.}$$

2. Puisque, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\ln(u_n)$, nous en déduisons

$$u_n=e^{v_n}.$$

Par composition de la fonction exp continue sur $\mathbb{R}$ avec la suite v_n, nous en concluons que la suite (u_n) converge et nous avons

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{X\to\frac{1}{2}}e^X=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

D'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{e}.}$$

Exercice 13 (★★★☆) Une exponentielle généralisée

Nous considérons la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x)=\begin{cases}x^x=e^{x\ln x} & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. Justifier que cette fonction est continue à droite en $x=0$.
2. Est-elle dérivable en $x=0$?
3. Étudier les variations de f sur $[0,+\infty[$.
4. Montrer que f est convexe.
5. En déduire que, pour tous les réels a et b strictement positifs,

$$4\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}\leqslant\left(a^a+b^b\right)^2$$

1. Nous savons que

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$$

Il en résulte par composition, en posant $X=x\ln x$,

$$\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}=\lim_{X\to0}e^X=1=f(0),$$

autrement dit :

$$f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} f(0),$$

ce qui justifie que la fonction f est continue à droite en 0.

2. Pour $x > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{f(x)-1}{x}\\ &= \frac{e^{x\ln x}-1}{x}\\ &= \frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\times \ln x\\ &= \frac{e^{X}-1}{X}\times \ln x.\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{X\to 0}\frac{e^X-1}{X} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$$

par produit, nous en déduisons,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$$

$\boxed{\text{ce qui prouve que la fonction } f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$

Cependant, nous précisons que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point de coordonnées (0,1) une demi-tangente verticale.

3. La fonction f est dérivable par composition et produit sur $]0, +\infty[$.
Pour tout réel $x > 0$, il vient :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{\mathrm{d}x}e^{x\ln x}\\ &= \left(\ln x + x\times\frac{1}{x}\right)e^{x\ln x}\\ &= (\ln x+1)e^{x\ln x}\\ &= (\ln x+1)f(x).\end{aligned}$$

Puisque $f(x) = e^{x\ln x} > 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}f'(x) = 0 &\iff \ln x + 1 = 0 \iff x = e^{-1}\\ f'(x) < 0 &\iff \ln x + 1 < 0 \iff 0 < x < e^{-1}\\ f'(x) > 0 &\iff \ln x + 1 > 0 \iff x > e^{-1}\end{aligned}$$

Nous en concluons que f est
- croissante sur $\left[e^{-1}, +\infty\right[$,
- décroissante sur $]0,e^{-1}[$.

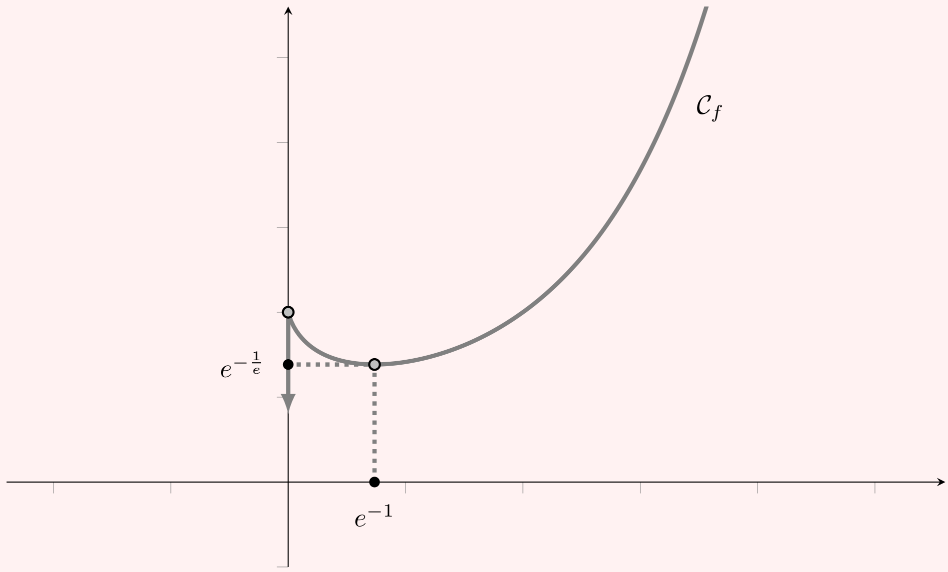
Pour résumer, nous donnons le tableau de variations de cette fonction .

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$f\left(e^{-1}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

En $x = e^{-1}$, la fonction f atteint un minimum qui est égal à

$$f\left(e^{-1}\right) = \left(e^{-1}\right)^{e^{-1}} = \left(e^{-1}\right)^{\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}}.$$

Contrôle graphique :



4. La fonction f est dérivable deux fois sur $]0, +\infty[$.
Pour tout réel $x > 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(f'\right)'(x) \\ &= \frac{1}{x}f(x) + (\ln x + 1)f'(x) \\ &= \frac{1}{x}f(x) + (\ln x + 1)^2 f(x) \\ &= \left(\frac{1}{x} + (\ln x + 1)^2\right) f(x) > 0. \end{aligned}$$

Nous en concluons que la fonction f est convexe.

5. Soient deux réels $a > 0$ et $b > 0$. En utilisant l'inégalité de convexité des « milieux » vue au chapitre **11**, il vient

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

ce qui donne :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{a^a+b^b}{2},$$

soit

$$2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{a+b}{2}} \leqslant a^a + b^b.$$

Puisque la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$, nous en déduisons

$$4\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{a+b}{2}}\right)^2 \leqslant \left(a^a+b^b\right)^2$$

ce qui prouve l'inégalité proposée :

$$\boxed{\forall\, a > 0, \forall\, b > 0, \quad 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b} \leqslant \left(a^a+b^b\right)^2.}$$

Exercice 14 (★★★☆) Dérivée n-ième

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Calculer la dérivée première et seconde de la fonction f.

Nous considérons deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = -(n+1)v_n \end{cases}$$

2. Montrer que, quel que soit le réel $x > 0$ et quel que soit l'entier naturel $n \geqslant 1$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln x}{x^{n+1}}.$$

3. Déterminer v_n en fonction de l'entier $n \geqslant 1$.

4. Établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = (-1)^{n+1} \times n! \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}\right).$$

1. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ par quotient.
Pour tout réel, $x > 0$, nous avons

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

La fonction f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ par quotient et nous obtenons

$$\begin{aligned} f''(x) = \left(f'\right)'(x) &= \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} \\ &= \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}. \end{aligned}$$

2. Soit un réel $x > 0$. Nous prouvons cette égalité par récurrence.

Initialisation
Sachant que $u_1 = 1$ et $v_1 = -1$, nous avons

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{u_1 + v_1 \ln x}{x^2},$$

ce qui justifie que l'égalité proposée est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité
Nous supposons l'égalité attendue vraie à un rang entier $n \geqslant 1$ fixé.
Montrons que :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{u_{n+1} + v_{n+1} \ln x}{x^{n+2}}.$$

Par définition de la dérivée $(n+1)$-ième et en appliquant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) &= \frac{\frac{v_n}{x} \times x^{n+1} - (u_n + v_n \ln x) \times (n+1)x^n}{\left(x^{n+1}\right)^2} \\ &= \frac{x^n\left(v_n - (n+1)u_n - (n+1)v_n \ln x\right)}{x^{2n+2}} \\ &= \frac{v_n - (n+1)u_n - (n+1)v_n \ln x}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

En posant $u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n$, et $v_{n+1} = -(n+1)v_n$, il vient

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{u_{n+1} + v_{n+1} \ln x}{x^{n+2}}$$

ce qui démontre que l'égalité attendue est héréditaire.
En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\boxed{\forall\, x > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln x}{x^{n+1}}.}$$

3. Nous calculons les premiers termes de la suite (v_n). De $v_1 = -1$, il résulte

$$\begin{aligned} v_2 &= -2v_1 = (-2) \times (-1) = (-1)^2 \times 2! \\ v_3 &= -3v_2 = (-1)^3 \times 3! \end{aligned}$$

Ainsi, nous prouvons par récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = (-1)^n \times n!$$

Initialisation
Cette égalité est vraie au rang $n = 1$ d'après le calcul précédent.

Hérédité
Nous supposons l'égalité proposée vraie à un rang entier $n \geqslant 1$ fixé.
Montrons que : $v_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1)!$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -(n+1)v_n \\ &= -(n+1) \times (-1)^n \times n! \\ &= (-1)^{n+1}(n+1)!, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'hérédité de l'égalité proposée.
En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = (-1)^n \times n!}$$

4. Nous établissons par récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = (-1)^{n+1} \times n! \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}\right).$$

Initialisation
Nous avons

$$u_1 = 1 = (-1)^2 \times 1! \times 1.$$

L'égalité proposée est donc vraie au rang $n = 1$.

Hérédité
Nous supposons l'égalité proposée vraie à un rang entier $n \geqslant 1$ fixé.
Montrons que :

$$u_{n+1} = (-1)^{n+2} \times (n+1)! \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n+1}\right).$$

En utilisant la preuve précédente et l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= v_n - (n+1)u_n \\
&= (-1)^n \times n! - (n+1)\left[(-1)^{n+1} \times n!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= (-1)^n \times n! \times \frac{n+1}{n+1} - (-1)^{n+1} \times n! \times (n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}\right) \\
&= (-1)^n \times (n+1)!\left(\frac{1}{n+1}+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \\
&= (-1)^{n+2} \times (n+1)!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Ceci démontre que l'égalité attendue est héréditaire.
En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = (-1)^{n+1} \times n!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}\right).}$$

Exercice 15 (★★★★) Fonction puissance d'exposant réel

Soient a un réel et p_a la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0, \quad p_a(x) = x^a = e^{a \ln x}.$$

1. Justifier que, pour tout réel a et tout réel $x > 0$,
   a) $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$
   b) $\ln(x^a) = a \ln x$.
2. Étudier, selon le signe de a, les limites de p_a en 0 , en $+\infty$.
3. Quel est le sens de variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction p_a ?
4. Selon le signe de a, déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions
   a) $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^a}$
   b) $x \longmapsto \dfrac{e^x}{x^a}$

   Quelle est la limite en 0 , à droite, de $x \longmapsto x^a \ln x$?
5. Justifier que si $a \in]1, +\infty[$, alors p_a est convexe.
6. En déduire, pour tout réel $x > 0$,

$$x^a - 1 \geqslant a(x-1).$$

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Nous avons
   a) $x^{-a} = e^{-a \ln x} = \dfrac{1}{e^{a \ln x}} = \dfrac{1}{x^a}$.
   b) $\ln(x^a) = \ln\left(e^{a \ln x}\right) = a \ln x$.
2. **1^er^ cas : $a = 0$.**

   Dans ce cas, $p_0 : x \longmapsto 1$, ce qui donne

$$\lim_{x \to 0^+} p_0(x) = \lim_{x \to +\infty} p_0(x) = 1.$$

   Nous supposons dans les questions qui suivent que $a \neq 0$.

   2^e^ cas : $a > 0$.

En posant $X = a\ln x$, par composition, nous obtenons :

$$\lim_{x\to 0^+} p_a(x) = \lim_{X\to -\infty} e^X = 0$$
$$\lim_{x\to +\infty} p_a(x) = \lim_{X\to +\infty} e^X = +\infty$$

3e cas : $a < 0$.

Puisque dans ce cas, $-a > 0$, en utilisant la première égalité établie à la question **1**, nous en déduisons

$$\lim_{x\to 0^+} p_a(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{p_{-a}(x)} = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} p_a(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{p_{-a}(x)} = 0$$

3. La fonction p_a est dérivable par composition sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
Nous obtenons

$$\begin{aligned} p_a'(x) &= \frac{a}{x} e^{a\ln x} \\ &= \frac{a}{x} \times x^a \\ &= a x^{a-1}. \end{aligned}$$

Nous en concluons que

— si $a > 0$, alors $p_a'(x) > 0$: la fonction p_a est croissante strictement sur $]0, +\infty[$.

— si $a < 0$, alors $p_a'(x) < 0$: la fonction p_a est décroissante strictement sur $]0, +\infty[$.

Nous illustrons ces résultats par deux exemples dans la figure qui suit.

4. a) 1er cas : $a < 0$.

$$\lim_{x\to +\infty} x^a = 0, \text{ soit } \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^a} = +\infty.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, nous obtenons par produit,

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = +\infty.}$$

2e cas : $a > 0$.

La forme est indéterminée du type « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ».
Pour lever cette indétermination, nous posons $X = x^a$. Ainsi, quand x tend vers $+\infty$, il en est de même de X.
Nous avons $\ln X = \ln(x^a) = a\ln x$. Nous en déduisons

$$\frac{\ln x}{x^a} = \frac{1}{a}\frac{\ln X}{X}$$

Par composition, nous en concluons

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \frac{1}{a} \lim_{X\to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0.}$$

b) 1er cas : $a < 0$.

Nous avons

$$\lim_{x\to +\infty} x^a = 0, \text{ soit } \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^a} = +\infty$$

Puisque $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$, nous obtenons par produit,

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty.}$$

2^e cas : $a > 0$**.**
La forme est indéterminée du type « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ ». Nous avons

$$\ln\left(\frac{e^x}{x^a}\right) = x - a\ln x = x\left(1 - a\frac{\ln x}{x}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, par produit nous en déduisons

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x}{x^a}\right) = +\infty$$

ce qui implique

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty.}$$

c) 1^er cas : $a < 0$**.**
Nous savons :

$$\lim_{x\to 0^+} x^a = +\infty$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, nous obtenons par produit,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^a \ln x = -\infty.}$$

2^e cas : $a > 0$**.**
La forme est indéterminée du type « $0 \times +\infty$ ».
Nous posons, pour $x > 0$, $X = \dfrac{1}{x}$. Il vient

$$x^a \ln x = \left(\frac{1}{X}\right)^a \ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{\ln X}{X^a}.$$

Par composition, nous en concluons

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^a \ln x = \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln X}{X^a} = 0.}$$

5. La fonction p_a est dérivable deux fois sur $]0, +\infty[$.
Pour tout réel $x > 0$, nous avons

$$p_a'(x) = ax^{a-1}$$
$$p_a''(x) = a(a-1)x^{a-2}$$

$\boxed{\text{Puisque } a > 1,\ p_a''(x) > 0, \text{ ce qui prouve que la fonction } p_a \text{ est convexe.}}$

6. Soit $\mathcal{C}_a$ la courbe représentative de la fonction p_a. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_a$ au point d'abscisse $x = 1$ est

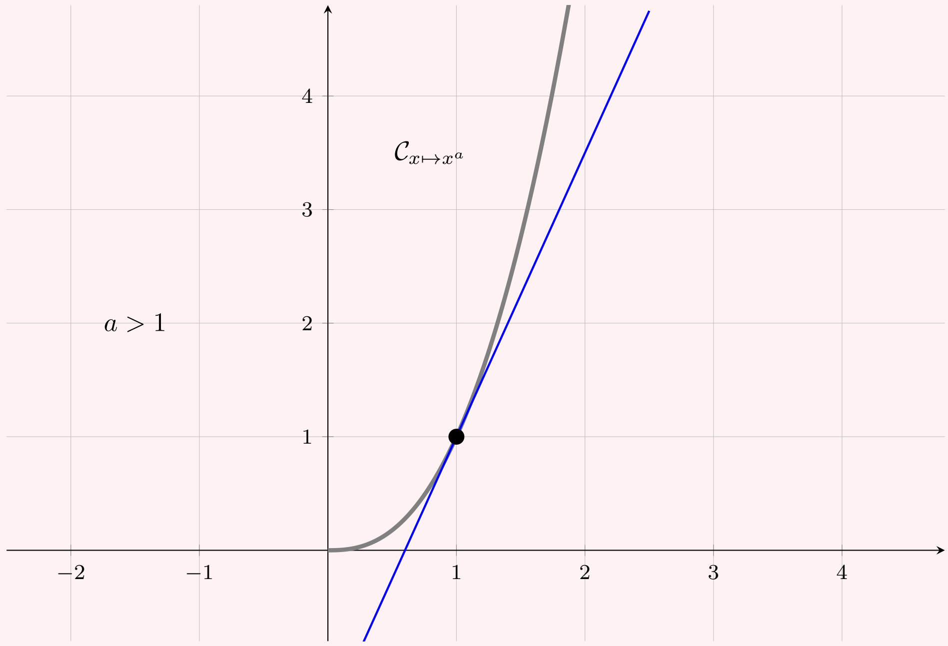
$$y = p_a'(1)(x-1) + p_a(1), \quad \text{soit } y = a(x-1) + 1.$$

Puisque p_a est convexe, nous savons que la courbe $\mathcal{C}_a$ est au-dessus de toutes ses tangentes.
En particulier, il en résulte, pour tout réel $x > 0$,

$$p_a(x) \geqslant a(x-1) + 1$$

ce qui démontre l'inégalité attendue :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad x^a - 1 \geqslant a(x-1).}$$


4
3
2
1
−2
−1
1
2
3
4
$\mathcal{C}_{x\mapsto x^a}$
$a > 1$