



## Correction du TD 14 Primitives et équations différentielles

### Calculs de primitives

#### Exercice 1 (★★☆☆) Primitives et fonction $\ln$

1. Quelles sont les primitives des fonctions suivantes

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln x}{x} \end{array} \right.$$
$$g \left| \begin{array}{l} ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x \ln x} \end{array} \right.$$

2. En calculant la dérivée sur  $]0, +\infty[$  de la fonction  $u : x \mapsto \frac{x^2}{2} \ln x$ , déterminer les primitives de la fonction  $h : x \mapsto x \ln x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. En calculant la dérivée sur  $]0, +\infty[$  de la fonction  $v : x \mapsto x \ln x$ , déterminer les primitives  $L$  de la fonction  $x \mapsto \ln x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

1. ▷ Primitives sur  $]0, +\infty[$  de  $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ .

Pour tout réel  $x > 0$ , nous posons

$$u(x) = \ln x,$$

il vient

$$u'(x) = \frac{1}{x}.$$

Nous en déduisons

$$f(x) = u'(x)u(x).$$

Nous en concluons que les primitives  $F$  de  $f$  sur  $]0, +\infty[$  sont définies par

$$F(x) = \frac{u^2(x)}{2} + c = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

- ▷ Primitives sur  $]1, +\infty[$  de  $g : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ .

Pour tout réel  $x > 1$ , nous posons

$$u(x) = \ln x,$$

il vient

$$u'(x) = \frac{1}{x},$$

ce qui donne

$$g(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Puisque pour  $x > 1$ ,  $u(x) = \ln x > 0$ , nous en concluons que les primitives  $G$  de  $g$  sur  $]1, +\infty[$  sont définies par

$$G(x) = \ln(|u(x)|) + c = \ln(\ln x) + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

2. La fonction  $u$  est dérivable par produit sur  $]0, +\infty[$ .

Nous obtenons

$$u'(x) = x \ln x + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} = x \ln x + \frac{x}{2}.$$

Nous en déduisons, pour tout réel  $x > 0$ ,

$$h(x) = x \ln x = u'(x) - \frac{x}{2}.$$

Par suite, les primitives  $H$  de  $h$  sur  $]0, +\infty[$  sont définies par

$$H(x) = u(x) - \frac{x^2}{4} + c = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

3. La fonction  $v$  est dérivable par produit sur  $]0, +\infty[$ .

Nous obtenons

$$v'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Nous en déduisons, pour tout réel  $x > 0$ ,

$$\ln x = v'(x) - 1.$$

Par conséquent, les primitives  $L$  de  $\ln$  sur  $]0, +\infty[$  sont définies par

$$L(x) = v(x) - x + c = x \ln x - x + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

*Remarque. Il est clair qu'une primitive d'un produit de deux fonctions n'est pas égale au produit des deux primitives de ces dernières. Cependant les questions 2. et 3. de cet exercice introduisent une méthode de calcul pour obtenir une primitive d'un produit. Cette technique de calcul sera précisée lors du chapitre suivant dans le paragraphe « intégration par parties ».*

## Exercice 2 (★★☆☆) Primitives de fonctions trigonométriques

Déterminer les primitives des fonctions suivantes

1.  $f : x \mapsto \cos(\pi x) \sin^3(\pi x)$ , sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $g : x \mapsto \cos^2 x$ , sur  $\mathbb{R}$ .
3.  $\tan : x \mapsto \tan x$ , sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .
4.  $h : x \mapsto \sin(x) \cos(x) e^{-\cos(2x)}$ , sur  $\mathbb{R}$ .

1. Primitives sur  $\mathbb{R}$  de  $f : x \mapsto \cos(\pi x) \sin^3(\pi x)$ .

Pour tout réel  $x$ , nous posons

$$u(x) = \sin \pi x,$$

il vient

$$u'(x) = \pi \cos \pi x.$$

Nous en déduisons

$$f(x) = \frac{1}{\pi} u'(x) u^3(x).$$

Nous en concluons que les primitives  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sont définies par

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \frac{u^4(x)}{4} + c = \frac{1}{4\pi} \sin^4(\pi x) + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

2. Primitives sur  $\mathbb{R}$  de  $g : x \mapsto \cos^2 x$ .

Pour tout réel  $x$ , nous disposons, par passage à « l'angle double », de l'égalité

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Il en résulte que les primitives  $G$  de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  sont définies par

$$G(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

3. Primitives sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  de  $\tan : x \mapsto \tan x$ .

Pour tout réel  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , nous avons

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Ainsi, nous posons

$$u(x) = \cos x,$$

il vient

$$u'(x) = -\sin x,$$

ce qui donne

$$\tan(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Puisque, pour  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $\cos x > 0$ , nous en concluons que les primitives  $T$  de  $\tan$  sur cet intervalle sont définies par

$$T(x) = -\ln(|u(x)|) + c = -\ln(\cos x) + c = \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

4. Primitives sur  $\mathbb{R}$  de  $h : x \mapsto \sin x \cos x e^{-\cos 2x}$ .

Pour tout réel  $x$ , nous posons

$$u(x) = -\cos 2x,$$

il vient

$$u'(x) = -(-2 \sin 2x) = 2 \sin 2x = 4 \sin x \cos x.$$

Nous en déduisons

$$h(x) = \frac{1}{4} u'(x) e^{u(x)}.$$

Nous en concluons que les primitives  $H$  de  $h$  sur  $\mathbb{R}$  sont définies par

$$H(x) = \frac{1}{4} e^{u(x)} + c = \frac{1}{4} e^{-\cos 2x} + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

### Exercice 3 (★★★★☆) Primitives et parité

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et  $F$  une primitive de  $f$ .

1. Si  $f$  est impaire, qu'en est-il de la parité de  $F$ ?
2. Si  $f$  est paire, à quelle condition initiale  $F$  doit-elle satisfaire pour déterminer la parité de cette dernière?

1. Nous supposons que  $f$  est impaire.

Pour tout réel  $x$ , nous posons

$$g(x) = F(x) - F(-x).$$

Cette fonction est, par composition et différence, dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ , nous avons, sachant que  $f$  est impaire,

$$g'(x) = F'(x) - (-F'(-x)) = f(x) + f(-x) = 0.$$

Il en résulte qu'il existe un réel  $c$ , tel que quel que soit le réel  $x$ ,

$$g(x) = c.$$

En particulier, pour  $x = 0$ , nous obtenons

$$c = g(0) = F(0) - F(0) = 0,$$

ce qui implique, pour tout réel  $x$ ,

$$g(x) = F(x) - F(-x) = 0, \text{ soit } F(-x) = F(x).$$

Nous en concluons que si  $f$  est impaire, alors  $F$  est paire.

2. Nous supposons que  $f$  est paire.

Pour tout réel  $x$ , nous posons

$$h(x) = F(x) + F(-x).$$

Cette fonction est, par composition et somme, dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ , nous avons, sachant que  $f$  est paire,

$$h'(x) = F'(x) + (-F'(-x)) = f(x) - f(-x) = 0.$$

Il en résulte qu'il existe un réel  $c$ , tel que quel que soit le réel  $x$ ,

$$h(x) = c.$$

En particulier, pour  $x = 0$ , nous obtenons

$$c = h(0) = 2F(0).$$

Par conséquent, en imposant la condition

$$F(0) = 0,$$

il vient, pour tout réel  $x$ ,

$$h(x) = F(x) + F(-x) = 0, \text{ c'est-à-dire } F(-x) = -F(x).$$

Nous en concluons que si  $f$  est paire et  $F(0) = 0$ , alors  $F$  est impaire.

### Exercice 4 (★★★★) Fonction arctan

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et par conséquent admet des primitives sur cet intervalle.

À notre niveau, nous ne savons pas expliciter ces primitives.

Cependant, nous allons voir comment dégager des propriétés qualitatives de l'une d'entre elles sans la déterminer explicitement.

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  satisfaisant à l'équation différentielle

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ avec } f(0) = 0$$

- Quel est le sens de variation de la fonction  $f$  ?
  - Déterminer une équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  à l'origine  $O$  du repère choisi.
  - La courbe  $\mathcal{C}_f$  admet-elle un point d'inflexion ?
  - Quelle est la parité de  $f$  ?
- Étude de la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - Déterminer la dérivée sur  $]0, +\infty[$  de la fonction  $g : x \mapsto f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ .
  - En déduire qu'il existe un réel  $c$  tel que, pour tout réel  $x > 0$ ,

$$f(x) = c - f\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Quelle est la limite de  $f$  en  $+\infty$  ?
- Composée de  $f$  avec la fonction tan.

Nous considérons la fonction  $h$  définie sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  par

$$x \mapsto f(\tan x) - x$$

- Déterminer la dérivée de  $h$ .
  - En déduire que, pour tout réel  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,
- $$f(\tan x) = x$$
- Calculer les images par  $f$  des réels  $1, \sqrt{3}$  et  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Quelle est la valeur exacte de la limite de  $f$  en  $+\infty$  ?

- En exploitant les informations obtenues lors des questions précédentes, donner une allure de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

- ▷ Nous savons que, pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) > 0,$$

ce qui justifie la croissance stricte de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

- Une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $O$  est

$$y = f'(0)x + f(0), \text{ c'est-à-dire } \boxed{y = x.}$$

- La fonction  $f$  est dérivable deux fois sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ , nous obtenons

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Nous en déduisons que  $f''(x)$  s'annule en 0 en changeant de signe, ce qui prouve que l'origine  $O$  du repère est un point d'inflexion.

Nous précisons la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à sa tangente  $(T)$ .

★ Si  $x < 0$ , alors  $f''(x) > 0$ , ce qui montre que  $f$  est convexe sur  $] -\infty, 0]$ .

Par conséquent la courbe  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $(T)$  sur l'intervalle  $] -\infty, 0]$ .

★ Si  $x > 0$ , alors  $f''(x) < 0$ , ce qui montre que  $f$  est concave sur  $[0, +\infty[$ .

Par suite la courbe  $\mathcal{C}_f$  est en-dessous de  $(T)$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

d) En utilisant l'exercice précédent, puisque  $f'$  est paire, nous en déduisons que sa primitive  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui satisfait à  $f(0) = 0$  est impaire.

2. a) La fonction  $g$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , par composition et somme.

Pour tout réel  $x > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - \frac{1}{x^2} f' \left( \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2 \left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

b) Il en résulte qu'il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que, pour tout réel  $x > 0$ ,

$$g(x) = c, \text{ soit } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = c.$$

Nous en concluons

$$\forall x > 0, \quad f(x) = c - f\left(\frac{1}{x}\right).$$

c) En posant  $X = \frac{1}{x}$ , par composition, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow 0} f(X) = f(0) = 0,$$

ce qui donne, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c - \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = c.$$

3. a) La fonction  $h$  est dérivable sur l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , par composition et différence.

Pour tout réel  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , nous obtenons

$$h'(x) = \tan'(x) f'(\tan x) - 1 = (1 + \tan^2 x) \times \frac{1}{1 + \tan^2 x} - 1 = 0.$$

b) Nous en déduisons qu'il existe une constante  $\mu$  telle que

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad h(x) = \mu.$$

En particulier, pour  $x = 0$ , il vient

$$\mu = h(0) = f(\tan 0) = f(0) = 0,$$

ce qui implique, pour tout réel  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ,

$$h(x) = 0.$$

Nous en concluons

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad f(\tan x) = x.$$

4. Nous avons

$$\begin{aligned} f(1) &= f\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}, \\ f(\sqrt{3}) &= f\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}, \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= f\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

De l'égalité  $f(\tan x) = x$ , il résulte

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(\tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x = \frac{\pi}{2}.$$

De plus, en posant  $X = \tan x$ , par composition, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(\tan x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = c.$$

Par unicité de la limite en  $\frac{\pi}{2}^-$ , nous en concluons

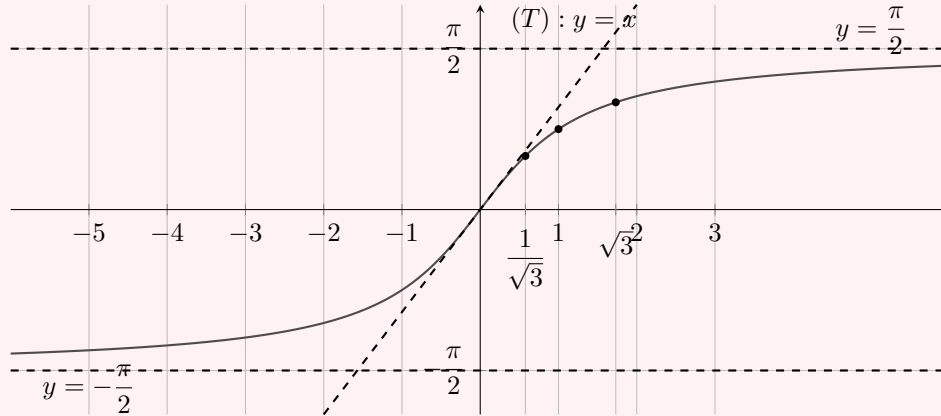
$$c = \frac{\pi}{2}, \text{ soit } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

5. Allure de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

La droite d'équation  $y = \frac{\pi}{2}$  est une asymptote pour la courbe en  $+\infty$ .

La fonction  $f$  étant impaire, il en est de même de la droite d'équation  $y = -\frac{\pi}{2}$  en  $-\infty$ .

En utilisant les propriétés qualitatives de cette fonction, établies aux questions précédentes, nous obtenons la courbe suivante :



Cette fonction est la fonction arctangente, notée  $\arctan$ .

*Remarque.* En résumé, la fonction  $\arctan$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Elle est impaire, dérivable sur  $\mathbb{R}$  et,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

## Méthode d'Euler et primitives

**Exercice 5 (★★★☆☆)** Résolution de l'équation  $y' = \frac{1}{1+x^2}$

Nous proposons une méthode algorithmique pour construire une approximation de la courbe représentative de la solution  $f$ , sur un intervalle choisi, de cette équation différentielle qui satisfait à la condition initiale  $f(0) = 0$ .

Soit un réel  $b > 0$  et  $[0, b]$  l'intervalle choisi.

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , en posant  $h = \frac{b}{n}$ , nous définissons une subdivision de l'intervalle  $[0, b]$ , en considérant la suite  $(x_k)$  avec  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que

$$x_k = kh = k \frac{b}{n}$$

1. Vérifier que, pour tout entier  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,

$$x_{k+1} = x_k + h$$

2. En déduire que l'approximation affine de  $f$  en  $x_k$  est

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + \frac{h}{h^2k^2 + 1}$$

Pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , nous considérons les points  $M_k(x_k, y_k)$  tels que :

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = 0 \\ x_{k+1} = x_k + h \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{h^2k^2 + 1} \end{cases}$$

La méthode d'Euler permet d'approcher la courbe  $\mathcal{C}_f$  par le nuage de points  $M_k$ , le réel  $b > 0$  et l'entier naturel  $n$  non nul étant choisis.

3. Proposer un programme Python qui dessine les points  $M_k$  dans un repère.

1. Soit un entier  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Nous avons

$$x_{k+1} = (k+1)h = kh + h = x_k + h.$$

2. L'approximation affine de  $f$  en  $x_k$  est

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) &= f(x_k + h) \\ &\approx f(x_k) + hf'(x_k) \\ &\approx f(x_k) + \frac{h}{h^2k^2 + 1}. \end{aligned}$$

3. Étant donné un réel  $b > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , avec un « pas »  $h = \frac{b}{n}$ , nous proposons le programme Python qui suit.

```
1 from math import *
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 b=float(input("b="))
4 n=int(input("n="))
5 h=b/n
6 L = []
7 K=[]
8 x=0
9 y=0
10 for i in range(1,n):
11     x=h*i
12     y=y+h/(h**2*i**2+1)
```

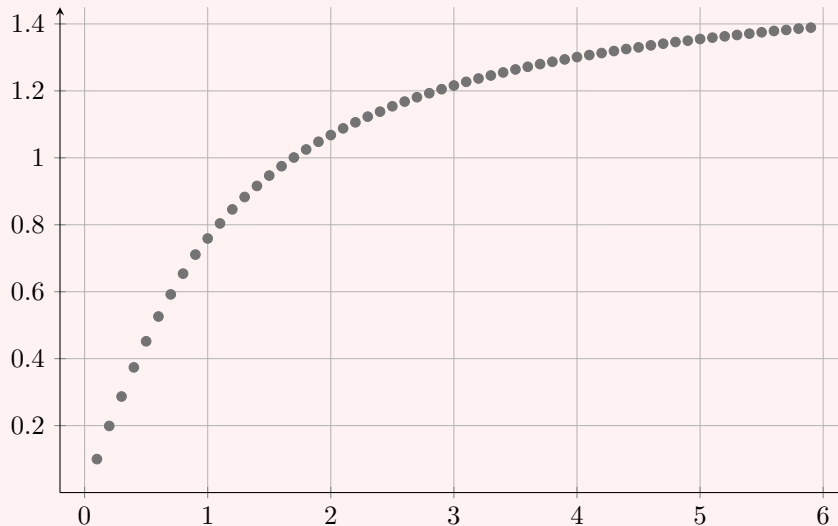
```

13     L.append(x)
14     K.append(y)
15 plt.scatter(L,K)
16 plt.grid()
17 plt.show()

```

Nous choisissons par exemple  $b = 6$  et  $n = 60$ .

Ceci donne, avec un pas  $h = \frac{6}{60} = 0,1$



### Exercice 6 (★★★★☆) Primitives de $x \mapsto e^{-x^2}$

La fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$  qui est continue sur  $\mathbb{R}$ , admet des primitives que nul ne sait expliciter en utilisant des fonctions élémentaires.

Cependant, nous allons voir comment établir quelques propriétés qualitatives de l'une d'entre elles puis nous employons la méthode d'Euler pour obtenir une allure approximative de sa courbe représentative.

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  satisfaisant à l'équation différentielle

$$f'(x) = e^{-x^2}, \quad \text{avec } f(0) = 0$$

1. Quel est le sens de variation de la fonction  $f$ ? Quelle est la parité de  $f$ ?
2. En se plaçant dans les mêmes conditions que dans l'exercice précédent, justifier que

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + he^{-k^2h^2}$$

3. Pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , nous considérons les points  $M_k(x_k, y_k)$  tels que

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = 0 \\ x_{k+1} = x_k + h \\ y_{k+1} = y_k + he^{-k^2h^2} \end{cases}$$

Le réel  $b > 0$  et l'entier naturel  $n$  non nul étant choisis, proposer un programme Python qui dessine le nuage des points  $M_k$  dans un repère.

1.  $\triangleright$  Nous savons que, pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) > 0,$$

ce qui justifie la croissance stricte de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$\triangleright$  En utilisant l'exercice 3, puisque  $f' : x \mapsto e^{-x^2}$  est paire, nous en déduisons que sa

primitive  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui satisfait à  $f(0) = 0$  est impaire.

2. L'approximation affine de  $f$  en  $x_k$  est

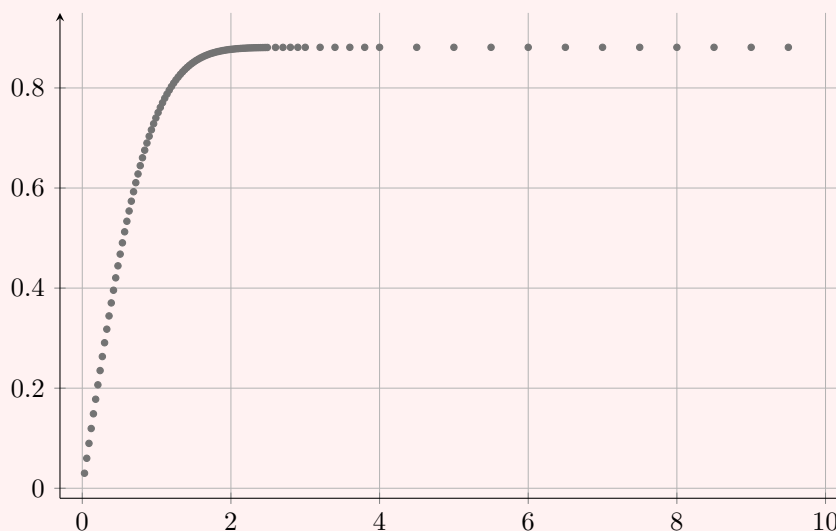
$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) &= f(x_k + h) \\ &\approx f(x_k) + hf'(x_k) \\ &\approx f(x_k) + he^{-k^2 h^2}. \end{aligned}$$

3. Comme dans l'exercice précédent, étant donné un réel  $b > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , avec un « pas »  $h = \frac{b}{n}$ , nous proposons le programme Python qui suit.

```
1 from math import *
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 b=float(input("b="))
4 n=int(input("n="))
5 h=b/n
6 L = []
7 K=[]
8 x=0
9 y=0
10 for i in range(1,n):
11     x=h*i
12     y=y+h*exp(-i**2*h**2)
13     L.append(x)
14     K.append(y)
15 plt.scatter(L,K)
16 plt.grid()
17 plt.show()
```

Nous choisissons par exemple  $b = 10$  et  $n = 1000$ .

Ceci donne, avec un pas  $h = \frac{10}{1000} = 0,01$



*Remarque. La limite de  $f$  en  $+\infty$  est  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0,886$ , ce qui est confirmé par le plateau du nuage de points.*

# Équations du 1<sup>er</sup> ordre

## Exercice 7 (★★☆☆) Loi de désintégration radioactive

On désigne par  $N(t)$  le nombre d'atomes d'une substance radioactive à l'instant  $t$  (en secondes).

La loi de désintégration radioactive stipule que le taux de variation du nombre  $N(t)$  est proportionnel au nombre  $N(t)$ .

Ce qui signifie que entre les instants  $t$  et  $t + h$ , on a

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = -aN(t),$$

où  $a$  est une constante dépendant de la substance radioactive considérée.

1. En supposant que la fonction  $t \mapsto N(t)$  est dérivable en  $t \geq 0$ , justifier que la fonction  $N$  est solution de l'équation différentielle  $y' = -ay$ .
2. Déterminer la loi de désintégration radioactive, sachant que la condition initiale est  $N_0 = N(0)$ .
3. La demi-vie d'une substance radioactive est le temps  $T$  au bout duquel la moitié des atomes radioactifs sont désintégrés.  
Calculer  $T$  en fonction de  $a$ .

1. La fonction  $t \mapsto N(t)$  est dérivable en  $t \geq 0$ . Il en résulte que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = N'(t).$$

De plus, nous avons  $\lim_{h \rightarrow 0} (-aN(t)) = -aN(t)$ .

Par unicité de la limite, nous en déduisons

$$N'(t) = -aN(t),$$

ce qui justifie que la fonction  $N$  est solution de l'équation différentielle

$$y' = -ay.$$

2. En appliquant les résultats du cours, pour tout  $t \geq 0$ , nous obtenons

$$N(t) = ce^{-at}, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale implique que  $N_0 = N(0) = c$ .

La loi de désintégration radioactive, est donc décrite, pour  $t \geq 0$ , par l'égalité

$$N(t) = N_0 e^{-at}.$$

3. La demi-vie est le réel  $T > 0$  tel que  $N(T) = \frac{N_0}{2}$ .

Nous obtenons ainsi les équivalences suivantes

$$N_0 e^{-aT} = \frac{N_0}{2} \iff e^{-aT} = \frac{1}{2} \iff -aT = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \iff T = \frac{\ln 2}{a}.$$

$$\text{Nous en concluons que } T = \frac{\ln 2}{a}.$$

### Exercice 8 (★★★★☆) Équation du premier ordre avec un second membre

On considère l'équation différentielle

$$y - y' = \frac{e^x}{x^2} \quad (1)$$

On se propose de déterminer les solutions de cette équation qui sont définies sur  $]0, +\infty[$ .

1. Vérifier que la fonction  $u$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $u(x) = \frac{e^x}{x}$  est une solution particulière de (1).
2. Prouver qu'une fonction  $v$  définie sur  $]0, +\infty[$  est une solution de (1) si et seulement si la fonction  $v - u$  est solution de l'équation différentielle

$$y - y' = 0. \quad (2)$$

3. En déduire toutes les solutions définies sur  $]0, +\infty[$  de l'équation (1).

1. La fonction  $u$  est dérivable par quotient sur  $]0, +\infty[$ , et nous avons

$$u(x) - u'(x) = u(x) - \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x} - \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2},$$

ce qui justifie que la fonction  $u$  est une solution particulière de (1).

2.  $\triangleright$  Si  $v$  est une solution de (1) alors, pour tout réel  $x > 0$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} (v - u)(x) - (v - u)'(x) &= v(x) - u(x) - v'(x) + u'(x) \\ &= (v(x) - v'(x)) - (u(x) - u'(x)). \end{aligned}$$

Puisque les fonctions  $v$  et  $u$  sont solutions de (1), nous obtenons

$$(v - u)(x) - (v - u)'(x) = \frac{e^x}{x^2} - \frac{e^x}{x^2} = 0,$$

ce qui prouve que la fonction  $v - u$  est solution de l'équation différentielle (2).

$\triangleright$  Réciproquement, si  $v - u$  est solution de (2) alors, pour tout réel  $x > 0$ , il vient

$$(v - u)(x) - (v - u)'(x) = 0,$$

ce qui implique

$$v(x) - v'(x) = u(x) - u'(x) = \frac{e^x}{x^2}.$$

Ainsi, la réciproque est vraie.

Nous en concluons que  $v$  définie sur  $]0, +\infty[$  est une solution de (1) si et seulement si  $v - u$  est solution de (2).

3. Nous en déduisons que  $v$  est une solution de (1) si et seulement si, pour tout réel  $x > 0$ ,

$$(v - u)(x) = ce^x, \text{ avec } c \in \mathbb{R},$$

ce qui donne, en conclusion,

$$\forall x > 0, \quad v(x) = ce^x + u(x) = ce^x + \frac{e^x}{x}.$$

*Remarque.* Nous observons que la solution générale de cette équation linéaire (1) avec un second membre est la somme de la solution générale de l'équation linéaire (2) avec un second membre égal à 0 et d'une solution particulière de (1).

### Exercice 9 (★★☆☆) Loi de la chute d'un corps

On laisse tomber un corps de masse  $m$ , dans le champ de pesanteur. La vitesse  $v$  du centre d'inertie de ce corps est fonction du temps  $t$  de la chute, et satisfait à l'équation différentielle

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

où  $k > 0$  est le coefficient de freinage dû à la résistance de l'air et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. On suppose qu'à l'instant  $t = 0$ , la vitesse est nulle. Montrer que, pour tout  $t \geq 0$ , on a

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

3. Quelle est la limite de  $t \mapsto v(t)$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ? Interpréter ce résultat.
4. La résistance de l'air est négligée en faisant tendre  $k$  vers 0. Déterminer  $t \mapsto v(t)$ . Interpréter le résultat obtenu.

1. L'équation proposée est équivalente à

$$v'(t) = -\frac{k}{m}v(t) + g.$$

Cette dernière est de la forme  $y' = ay + b$ .

Nous en déduisons, pour tout réel  $t \geq 0$ ,

$$v(t) = ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

2. La condition initiale nous autorise à préciser que

$$0 = v(0) = c + \frac{mg}{k},$$

ce qui implique que  $c = -\frac{mg}{k}$ .

Nous en concluons

$$\forall t \geq 0, \quad v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

3. Puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = 0$ , il vient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{mg}{k},$$

ce qui signifie qu'une vitesse limite égale à  $\frac{mg}{k}$  est atteinte asymptotiquement lors d'une durée en chute libre suffisamment longue.

4. Lorsque  $k$  tend vers 0, le comportement de  $t \mapsto v(t)$  est indéterminé du type «  $+\infty \times 0$  ». Pour lever cette indétermination, nous observons que

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{mg}{k} \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{k}{m}t}}\right) \\ &= \frac{mg}{k} \left(e^{\frac{k}{m}t} - 1\right) \frac{1}{e^{\frac{k}{m}t}} \\ &= \frac{mg}{k} \times e^{-\frac{k}{m}t} \left(\frac{e^{\frac{k}{m}t} - 1}{\frac{k}{m}t}\right) \frac{k}{m} \\ &= gt \times e^{-\frac{k}{m}t} \left(\frac{e^{\frac{k}{m}t} - 1}{\frac{k}{m}t}\right). \end{aligned}$$

Par composition, nous avons :

$$\lim_{k \rightarrow 0} e^{-\frac{k}{m}t} = 1 \text{ et } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{k}{m}t} - 1}{\frac{k}{m}t} = 1.$$

Nous en déduisons que, lorsque  $k$  tend vers 0, la vitesse  $v(t)$  tend vers  $gt$ .

Ceci est conforme à la loi de la vitesse d'un corps en chute libre, de masse  $m$  dans le champ de pesanteur, en négligeant la résistance de l'air.

### Exercice 10 (★★★★) Une équation fonctionnelle

Soient  $f$  une fonction dérivable deux fois sur  $\mathbb{R}$  et  $f'$  sa fonction dérivée.  
Nous supposons que, pour tout réel  $x$ ,  $f$  satisfait à l'équation différentielle, notée (3),

$$(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1, \tag{3}$$

avec  $f'(0) = 1$ .

1. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) \neq 0$ .

Calculer  $f(0)$ .

2. Montrer que la fonction  $f$  est solution de l'équation différentielle du second ordre

$$y'' = y$$

3. Nous posons :  $u = f' + f$  et  $v = f' - f$ .

Calculer  $u(0)$  et  $v(0)$ .

4. Justifier que

$$u' = u \text{ et } v' = -v.$$

5. En déduire qu'il existe une unique fonction  $f$  satisfaisant à l'équation (3).

1.  $\triangleright$  Supposons, par l'absurde, qu'il existe un réel  $a$  tel que  $f'(a) = 0$ .

En particulier, pour  $x = a$ , nous avons

$$(f'(a))^2 - (f(a))^2 = 1,$$

ce qui implique que  $(f(a))^2 = -1$ .

Ceci est contradictoire.

Nous en concluons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \neq 0.$$

- $\triangleright$  En particulier, pour  $x = 0$ , nous obtenons  $(f'(0))^2 - (f(0))^2 = 1$ .

Puisque  $f'(0) = 1$ , nous en déduisons que  $f(0) = 0$ .

2. Soit un réel  $x$ . En dérivant les deux membres de l'égalité  $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$ , nous obtenons

$$2f''(x)f'(x) - 2f'(x)f(x) = 0, \text{ soit } 2f'(x)(f''(x) - f(x)) = 0.$$

Puisque pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) \neq 0$ , nous en déduisons

$$f''(x) - f(x) = 0,$$

ce qui prouve que  $f$  est une solution de l'équation différentielle  $y'' = y$ .

3.  $\triangleright$  Nous avons

$$u(0) = f'(0) + f(0) = 1 \text{ et } v(0) = f'(0) - f(0) = 1.$$

▷ Sachant que  $f'' = f$ , nous obtenons

$$\begin{cases} u' = (f' + f)' = f'' + f' = f + f' = u \\ v' = (f' - f)' = f'' - f' = f - f' = -v \end{cases}$$

4. L'équation  $u' = u$ , avec  $u(0) = 1$ , a pour unique solution la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$u : x \mapsto e^x.$$

L'équation  $v' = -v$ , avec  $v(0) = 1$ , a pour unique solution la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $v : x \mapsto e^{-x}$ .

Puisque nous disposons du système

$$\begin{cases} f' + f = u \\ f' - f = v \end{cases}$$

Nous en déduisons, par soustraction que

$$2f = u - v,$$

ce qui donne, pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = \frac{u(x) - v(x)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Réciproquement, pour tout réel  $x$ , nous avons

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Ainsi,  $f'(0) = 1$  et nous vérifions que la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  est solution de (3).

Nous en concluons que la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  est l'unique fonction satisfaisant à l'équation (3), avec la condition initiale  $f'(0) = 1$ .

*Remarque.* La fonction  $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  est par définition la fonction sinus-hyperbolique, notée  $\sinh$ .

Sa dérivée  $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  est la fonction cosinus-hyperbolique, notée  $\cosh$ .

Ces deux nouvelles fonctions de référence permettent de développer une trigonométrie dite hyperbolique.

Par exemple, l'équation (3) fournit une première relation de cette trigonométrie, puisque, pour tout réel  $x$ ,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

### Exercice 11 (★★★★☆) Une équation linéaire à coefficients variables

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Nous désignons par  $f$  une fonction distincte de la fonction nulle, dérivable sur  $]0, +\infty[$  et solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle

$$xy' + ny = 0 \quad (4)$$

Pour  $x > 0$ , on pose  $g(x) = x^n f(x)$ .

1. Montrer que  $f$  est solution de (4) si et seulement s'il existe  $a \in \mathbb{R}^*$ , tel que pour tout réel  $x > 0$ ,  $g(x) = a$ .
2. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur  $]0, +\infty[$ .

1. ▷ Nous supposons que  $f$  est une solution de (4).

Ainsi, pour tout réel  $x > 0$ ,  $xf'(x) + nf(x) = 0$ .

La fonction  $g$  est, par produit, dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

Nous obtenons

$$g'(x) = nx^{n-1}f(x) + x^n f'(x) = x^{n-1}(xf'(x) + nf(x)) = 0.$$

Puisque  $g$  est distincte de la fonction nulle et  $g'(x) = 0$ , il en résulte que :  
il existe  $a \in \mathbb{R}^*$ , tel que pour tout réel  $x > 0$ ,  $g(x) = a$ .

▷ Réciproquement, nous supposons que

$$\exists a \in \mathbb{R}^*, \forall x > 0, \quad g(x) = a.$$

Nous en déduisons, pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) = \frac{a}{x^n} = ax^{-n},$$

ce qui implique, pour tout  $x > 0$ ,

$$xf'(x) + nf(x) = x(-nax^{-n-1}) + nax^{-n} = -nax^{-n} + nax^{-n} = 0,$$

ce qui prouve que  $f$  est une solution de (4).

Nous en concluons que  $f$  est une solution de (4) si et seulement si il existe  $a \in \mathbb{R}^*$ , tel que pour tout réel  $x > 0$ ,  $g(x) = a$ .

2. Une fonction  $f$ , distincte de la fonction nulle, est une solution de (4) si et seulement si

$$\forall x > 0, \quad x^n f(x) = a, \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*,$$

ce qui établit que les fonctions

$$f : x \mapsto \frac{a}{x^n}, \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*,$$

sont les solutions sur  $]0, +\infty[$  de l'équation (4).

## Exercice 12 (★★★★) Une équation différentielle non linéaire

On considère l'équation différentielle notée (5),

$$y' = 2y - y^3, \quad \text{avec } y(0) = 1 \quad (5)$$

1. En utilisant la méthode d'Euler, donner un algorithme qui approche graphiquement une solution de (5) sur un intervalle  $[0, b]$ , où  $b$  est un réel positif strictement, puis négatif strictement.

On s'intéresse aux solutions  $y$  de (5) telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) > 0.$$

Pour tout réel  $x$ , on pose  $u(x) = \frac{1}{y^2(x)}$ .

1. Montrer que  $x \mapsto y(x)$  est solution de (5) si et seulement si  $x \mapsto u(x)$  est solution de l'équation différentielle

$$u' = -4u + 2 \quad (6)$$

2. En déduire la solution  $f$  de (5) qui satisfait à  $f(0) = 1$ .

1. Comme dans les exercices 5 et 6, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , en posant  $h = \frac{b}{n}$ , nous obtenons une subdivision de l'intervalle  $[0, b]$ , en considérant la suite  $(x_k)$  telle que

$$x_k = kh = k \frac{b}{n}, \quad \text{avec } k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Pour tout entier  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , nous avons

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

Nous en déduisons que l'approximation affine de  $f$  en  $x_k$  est

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) &= f(x_k + h) \\ &\approx f(x_k) + hf'(x_k) \\ &\approx f(x_k) + h(2f(x_k) - (f(x_k))^3) \\ &\approx (1 + 2h)f(x_k) - h(f(x_k))^3. \end{aligned}$$

Par suite, pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , nous considérons les points  $M_k(x_k, y_k)$  tels que :

$$\begin{cases} x_0 = 0, y_0 = 1 \\ x_{k+1} = x_k + h \\ y_{k+1} = (1 + 2h)y_k - hy_k^3 \end{cases}$$

Étant donné un réel  $b > 0$  ou  $b < 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , avec un « pas »  $h = \frac{b}{n}$ , la méthode d'Euler est décrite par le programme Python qui suit et permet d'approcher la courbe  $\mathcal{C}_f$  par le nuage de points  $M_k(x_k, y_k)$ .

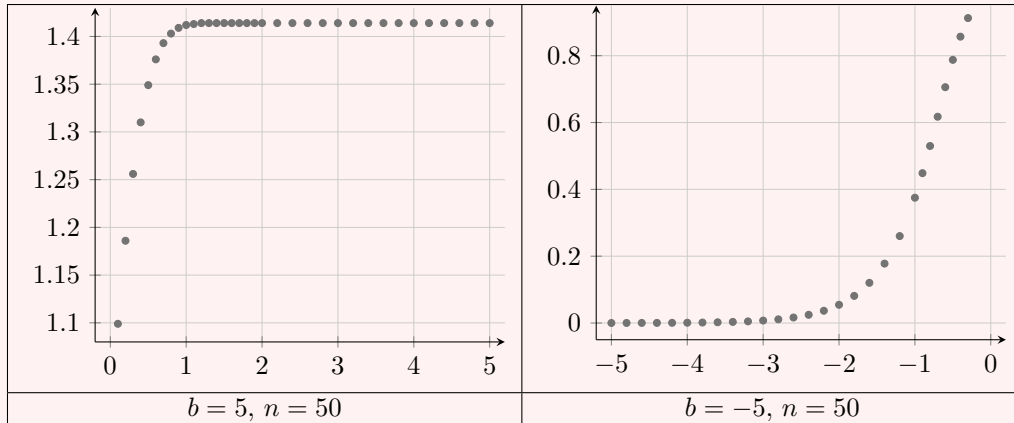
```
1 from math import *
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 b=float(input("b="))
4 n=int(input("n="))
5 h=b/n
6 L = []
7 K=[]
8 x=0
9 y=1
10 for i in range(1,n):
11     x=h*i
12     y=(1+2*h)*y-h*y**3
13     L.append(x)
```

```

14     K.append(y)
15 plt.scatter(L,K)
16 plt.grid()
17 plt.show()

```

Sur les intervalles  $[0,5]$  et  $[-5,0]$ , nous obtenons



2.  $\triangleright$  Nous supposons que  $x \mapsto y(x)$  est une solution de (5), c'est-à-dire

$$y'(x) = 2y(x) - y^3(x).$$

En remarquant que, pour tout réel  $x$ , on a  $u(x) = y^{-2}(x)$ , il vient :

$$\begin{aligned}
 u'(x) &= -2y'(x)y^{-3}(x) \\
 &= -2(2y(x) - y^3(x))y^{-3}(x) \\
 &= -4y^{-2}(x) + 2 \\
 &= -4u(x) + 2,
 \end{aligned}$$

ce qui justifie que la fonction  $x \mapsto u(x)$  est une solution de l'équation différentielle  $u' = -4u + 2$ .

- $\triangleright$  Réciproquement, nous supposons que la fonction  $u$  est une solution de  $u' = -4u + 2$ . Pour tout réel  $x$ , nous avons donc  $u'(x) = -4u(x) + 2$ .

En reprenant les calculs précédents, nous obtenons

$$-2y'(x)y^{-3}(x) = -4y^{-2}(x) + 2.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par  $-\frac{1}{2}y^3(x)$ , pour tout réel  $x$ , nous en déduisons

$$y'(x) = 2y(x) - y^3(x),$$

ce qui prouve que la fonction  $x \mapsto y(x)$  est solution de (5).

Nous en concluons que  $x \mapsto y(x)$  est solution de (5) si et seulement si  $x \mapsto u(x)$  est solution de l'équation différentielle  $u' = -4u + 2$ .

3. L'équation  $u' = -4u + 2$  a pour solutions les fonctions  $x \mapsto ce^{-4x} + \frac{1}{2}$ , avec  $c \in \mathbb{R}$ .

Nous en déduisons que  $x \mapsto y(x)$  est solution de (5) si et seulement si

$$\frac{1}{y^2(x)} = ce^{-4x} + \frac{1}{2},$$

ce qui équivaut à  $y^2(x) = \frac{1}{ce^{-4x} + \frac{1}{2}}$ . La solution  $f$  de (5) telle que  $f(0) = 1$ , induit

$$f^2(0) = \frac{1}{c + \frac{1}{2}} = 1,$$

ce qui implique

$$c + \frac{1}{2} = 1, \text{ soit } c = \frac{1}{2}.$$

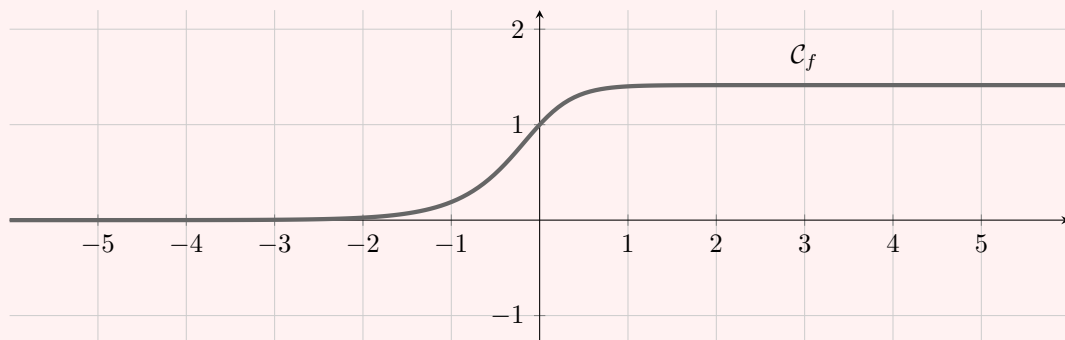
Ainsi, pour tout réel  $x$ , nous avons

$$f^2(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}(e^{-4x} + 1)} = \frac{2}{e^{-4x} + 1} > 0.$$

Puisque, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y(x) > 0$ , nous en concluons

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{2}{e^{-4x} + 1}}.$$

Relativement à la première question, nous contrôlons graphiquement.



### Exercice 13 (★★★☆☆) Équation du 1<sup>er</sup> ordre et trigonométrie

Nous considérons l'équation différentielle (7) définie pour tout réel  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  par

$$y' + (1 + \tan x)y = \cos x \quad (7)$$

1. Pour tout réel  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , montrer qu'une fonction  $f$  est une solution de (7) si et seulement si la fonction

$$u : x \mapsto \frac{f(x)}{\cos x}$$

est une solution de l'équation différentielle  $y' + y = 1$ .

2. En déduire la solution de (7) dont la représentation graphique passe par l'origine du repère choisi.

1.  $\triangleright$  Soit  $f$  une solution de (7) sur l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

La fonction  $u$  est dérivable par quotient sur cet intervalle et, pour tout réel  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , nous avons

$$f(x) = u(x) \cos x.$$

Il en résulte

$$f'(x) = u'(x) \cos x - u(x) \sin x.$$

Puisque

$$f'(x) + (1 + \tan x)f(x) = \cos x,$$

nous en déduisons successivement

$$u'(x) \cos x - u(x) \sin x + (1 + \tan x)u(x) \cos x = \cos x$$

$$u'(x) \cos x - u(x) \sin x + \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) u(x) \cos x = \cos x$$

$$u'(x) \cos x - u(x) \sin x + u(x) \cos x + u(x) \sin x = \cos x.$$

Comme

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ , \quad \cos x \neq 0,$$

après simplification, nous obtenons

$$u'(x) + u(x) = 1,$$

ce qui prouve que la fonction  $u : x \mapsto \frac{f(x)}{\cos x}$  est solution de l'équation, notée  $(E_0)$ ,

$$y' + y = 1 \tag{E_0}$$

▷ Réciproquement, nous supposons que  $u : x \mapsto \frac{f(x)}{\cos x}$  est une solution sur l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  de l'équation  $(E_0)$ .

Pour tout réel  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , nous avons

$$u'(x) = \frac{f'(x) \cos x - f(x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{f'(x) \cos x + f(x) \sin x}{\cos^2 x}.$$

Puisque

$$u'(x) + u(x) = 1,$$

nous en déduisons successivement

$$\begin{aligned} \frac{f'(x) \cos x + f(x) \sin x}{\cos^2 x} + \frac{f(x)}{\cos x} &= 1 \\ \frac{f'(x) \cos x + f(x) \sin x}{\cos x} + f(x) &= \cos x \\ f'(x) + f(x) \frac{\sin x}{\cos x} + f(x) &= \cos x \\ f'(x) + f(x) \tan x + f(x) &= \cos x \\ f'(x) + (1 + \tan x)f(x) &= \cos x \end{aligned}$$

ce qui justifie que  $f$  est solution de (7).

Nous en concluons que, sur l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $f$  est une solution de (7) si et seulement si la fonction  $u : x \mapsto \frac{f(x)}{\cos x}$  est une solution de  $(E_0)$ .

2. L'équation  $(E_0)$  est équivalente à  $y' = -y + 1$ .

Il en résulte que les solutions de cette équation sont les fonctions définies sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  par

$$x \mapsto ce^{-x} + 1, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

De la question précédente, il résulte que  $f$  est une solution de (7), sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , si et seulement si

$$\frac{f(x)}{\cos x} = ce^{-x} + 1, \text{ soit } f(x) = (ce^{-x} + 1) \cos x, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

Puisque  $f(0) = 0$ , nous en déduisons

$$0 = (ce^0 + 1) \cos 0,$$

soit

$$c + 1 = 0, \text{ c'est-à-dire } c = -1.$$

Nous en concluons que la solution  $f$  de (7) telle que  $f(0) = 0$ , est définie sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  par

$$\boxed{f(x) = (1 - e^{-x}) \cos x.}$$

## Deux exemples d'équations du 2<sup>e</sup> ordre

### Exercice 14 (★★★★) Équation $y'' = -\omega^2 y$

En physique, le mouvement d'un oscillateur libre non amorti (oscillateur mécanique : ressort, pendule dans le cas des petites oscillations ou oscillateur électrique) est régi par une équation différentielle linéaire du second ordre, notée (8), du type

$$y'' = -\omega^2 y \quad (8)$$

où la constante  $\omega > 0$  est la pulsation de l'oscillateur.

1. Montrer que les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{aligned} \theta &: x \mapsto 0 \\ u &: x \mapsto \cos \omega x \\ v &: x \mapsto \sin \omega x \end{aligned}$$

sont solutions de (8).

2. En déduire que la fonction

$$g = au + bv : x \mapsto au(x) + bv(x), \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

est une solution, définie sur  $\mathbb{R}$ , de l'équation (8).

3. Montrer que si  $x \mapsto y(x)$  est une solution de (8), alors la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$h : x \mapsto \omega^2 y^2(x) + (y'(x))^2$$

est constante.

4. Si de plus  $y(0) = y'(0) = 0$ , justifier que la fonction  $x \mapsto y(x)$  est la fonction nulle.

5. Soit  $y$  une solution de (8).

On considère la fonction  $\phi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\phi(x) = y(x) - y(0) \cos \omega x - \frac{y'(0)}{\omega} \sin \omega x.$$

Montrer que  $x \mapsto \phi(x)$  est une solution de (8).

6. Calculer  $\phi(0)$  et  $\phi'(0)$ .

7. En déduire que l'ensemble des solutions de (8) est l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ , de la forme

$$x \mapsto a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x), \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}.$$

8. Les deux réels  $y_0$  et  $v_0$  étant donnés, montrer que (8) admet une solution unique  $f$  satisfaisant aux conditions initiales

$$f(0) = y_0 \text{ et } f'(0) = v_0.$$

1.  $\triangleright$  Pour tout réel  $x$ , nous avons

$$\theta'(x) = \theta''(x) = 0.$$

Il en résulte que la fonction nulle  $\theta$  est une solution de l'équation différentielle (8).

- $\triangleright$  La fonction  $u : x \mapsto \cos \omega x$  est, par composition, dérivable deux fois sur  $\mathbb{R}$ . Nous avons

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\omega \sin \omega x, \\ u''(x) &= -\omega^2 \cos \omega x. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que, pour tout réel  $x$ ,  $u''(x) = -\omega^2 u(x)$ , ce qui prouve que la fonction  $u : x \mapsto \cos \omega x$  est une solution de (8).

- $\triangleright$  Nous vérifions de la même façon que  $v : x \mapsto \sin \omega x$  est une solution de (8).

2. La fonction  $g = au + bv$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , nous avons

$$\begin{aligned} g''(x) &= (au + bv)''(x) = au''(x) + bv''(x) \\ &= a(-\omega^2 u(x)) + b(-\omega^2 v(x)) \\ &= -\omega^2(au(x) + bv(x)) \\ &= -\omega^2 g(x), \end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction  $g : x \mapsto a \cos \omega x + b \sin \omega x$  est une solution de (8).

3. La fonction  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par composition et somme.  
Pour tout réel  $x$ , puisque  $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2\omega^2 y'(x)y(x) + 2y''(x)y'(x) \\ &= 2y'(x)(y''(x) + \omega^2 y(x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il en résulte qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$ , tel que pour tout réel  $x$ ,  $h(x) = c$ .

La fonction  $h$  est donc constante sur  $\mathbb{R}$ .

4. En particulier, pour  $x = 0$ , sachant que  $y(0) = y'(0) = 0$ , nous obtenons

$$c = h(0) = \omega^2 y^2(0) + (y'(0))^2 = 0,$$

ce qui prouve que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = (\omega y(x))^2 + (y'(x))^2 = 0.$$

Nous disposons ainsi d'une somme de deux carrés qui est nulle.

Pour tout réel  $x$ , nous en déduisons

$$\omega y(x) = 0 \text{ et } y'(x) = 0,$$

ce qui donne, puisque  $\omega > 0$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = 0.$$

Nous en concluons que  $x \mapsto y(x)$  est la fonction nulle.

5. La fonction  $\phi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par composition et somme de fonctions dérivables.  
Pour tout réel  $x$ , nous avons

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= y'(x) + \omega y(0) \sin \omega x - \frac{y'(0)}{\omega} \times \omega \cos \omega x \\ &= y'(x) + \omega y(0) \sin \omega x - y'(0) \cos \omega x. \end{aligned}$$

La fonction  $\phi'$  est également dérivable sur  $\mathbb{R}$  par composition et somme. Pour tout réel  $x$ , nous avons

$$\phi''(x) = y''(x) + \omega^2 y(0) \cos \omega x + \omega y'(0) \sin \omega x.$$

Or, la fonction  $x \mapsto y(x)$  est solution de (8) donc  $y'' = -\omega^2 y$ .

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \phi''(x) &= -\omega^2 y(x) + \omega^2 y(0) \cos \omega x + \omega y'(0) \sin \omega x \\ &= -\omega^2 \left( y(x) - y(0) \cos \omega x - \frac{y'(0)}{\omega} \sin \omega x \right) \\ &= -\omega^2 \phi(x), \end{aligned}$$

ce qui justifie que la fonction  $\phi$  est une solution de (8).

6. De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \phi(0) &= y(0) - y(0) \cos(\omega \cdot 0) - \frac{y'(0)}{\omega} \sin(\omega \cdot 0) = 0 \\ \phi'(0) &= y'(0) + \omega y(0) \sin(\omega \cdot 0) - y'(0) \cos(\omega \cdot 0) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\phi(0) = \phi'(0) = 0$ .

7. Soit  $x \mapsto y(x)$  une solution de (8).

Nous savons que  $\phi$  est aussi une solution de (8) satisfaisant à

$$\phi(0) = \phi'(0) = 0.$$

En appliquant le résultat de la question 4., nous obtenons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) = 0.$$

Il en résulte que pour tout réel  $x$ , nous avons

$$y(x) = y(0) \cos \omega x + \frac{y'(0)}{\omega} \sin \omega x.$$

En posant  $a = y(0)$  et  $b = \frac{y'(0)}{\omega}$ , nous obtenons que si  $x \mapsto y(x)$  est une solution de (8) alors, pour tout réel  $x$ ,

$$y(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x, \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Réciproquement nous avons montré à la question 2. que les fonctions de la forme :

$$x \mapsto a \cos \omega x + b \sin \omega x, \text{ sont solutions de (8).}$$

*En conclusion, nous retiendrons le résultat suivant :*

*Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\omega > 0$  un réel donné. Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

(i)  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y'' = -\omega^2 y$ .

(ii)  $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x$ .

8. Soit  $f : x \mapsto a \cos \omega x + b \sin \omega x$  une solution de (8) telle que

$$f(0) = y_0 \text{ et } f'(0) = v_0.$$

Pour tout réel  $x$ , nous avons  $f'(x) = -a\omega \sin \omega x + b\omega \cos \omega x$ .

Les deux conditions initiales induisent le système

$$\begin{cases} f(0) = y_0 \\ f'(0) = v_0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \cos 0 + b \sin 0 = y_0 \\ -a\omega \sin 0 + b\omega \cos 0 = v_0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = y_0 \\ b\omega = v_0 \end{cases}$$

Puisque  $\omega > 0$ , nous obtenons

$$\begin{cases} a = y_0 \\ b = \frac{v_0}{\omega} \end{cases}$$

Les réels  $y_0, v_0$  et  $\omega > 0$  étant donnés, la fonction

$$f : x \mapsto y_0 \cos \omega x + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega x,$$

est l'unique solution de (8) satisfaisant aux conditions initiales  $f(0) = y_0$  et  $f'(0) = v_0$ .

**Exercice 15 (★★★★) Équation différentielle  $y'' = \omega^2 y$** 

Soit  $\omega$  un réel strictement positif donné.  
On désigne par (9) l'équation différentielle :

$$y'' = \omega^2 y \quad (9)$$

1. Déterminer pour quelles valeurs du réel  $r$ , la fonction

$$u : x \mapsto e^{rx}$$

est une solution de l'équation (9).

2. Montrer qu'une fonction  $f$  dérivable deux fois sur  $\mathbb{R}$  est une solution de (9) si et seulement si la fonction

$$g = f' - \omega f$$

est une solution de l'équation différentielle

$$g' + \omega g = 0 \quad (10)$$

3. En déduire qu'une fonction  $f$  est une solution de (9) si et seulement s'il existe un réel  $\lambda$  tel que pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) - \omega f(x) = \lambda e^{-\omega x}.$$

4. Prouver que  $f$  est une solution de (9) si et seulement si la fonction

$$h : x \mapsto e^{-\omega x} f(x)$$

est telle que, pour tout réel  $x$  :

$$h'(x) = \lambda e^{-2\omega x}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

5. En déduire que  $f$  est une solution de (9) si et seulement si, il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}.$$

1. La fonction  $u$  est dérivable 2 fois sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} u'(x) &= r e^{rx}, \\ u''(x) &= r^2 e^{rx}. \end{aligned}$$

Il en résulte que cette fonction est solution de (9) si et seulement si

$$r^2 e^{rx} = \omega^2 e^{rx},$$

ce qui donne, après simplification par  $e^{rx}$ ,

$$r^2 = \omega^2, \text{ c'est-à-dire } r = -\omega \text{ ou } r = \omega.$$

Par conséquent, les fonctions  $x \mapsto e^{-\omega x}$  et  $x \mapsto e^{\omega x}$  sont deux solutions particulières de (9).

2.  $\triangleright$  Nous supposons que  $f$  est une solution de (9), c'est-à-dire

$$f'' = \omega^2 f.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} g' + \omega g &= (f' - \omega f)' + \omega (f' - \omega f) \\ &= f'' - \omega f' + \omega f' - \omega^2 f \\ &= f'' - \omega^2 f \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $g$  est une solution de l'équation  $g' + \omega g = 0$ .

▷ Réciproquement, nous supposons que  $g$  est une solution de  $g' + \omega g = 0$ , c'est-à-dire

$$g' = -\omega g,$$

ce qui donne

$$f'' - \omega f' = -\omega (f' - \omega f), \text{ soit } f'' = \omega^2 f.$$

Par suite, la fonction  $f$  est une solution de (9).

Nous en concluons l'équivalence annoncée.

3. En utilisant la question précédente, nous savons que  $f$  est une solution de (9) si et seulement si

$$g' = -\omega g,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un réel  $\lambda$  tel que, pour tout réel  $x$ ,

$$g(x) = f'(x) - \omega f(x) = \lambda e^{-\omega x}.$$

4. ▷ Nous supposons que  $f$  est une solution de (9).

La fonction  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par composition et produit, ce qui donne

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\omega e^{-\omega x} f(x) + e^{-\omega x} f'(x) \\ &= e^{-\omega x} (f'(x) - \omega f(x)) \\ &= e^{-\omega x} \lambda e^{-\omega x} \\ &= \lambda e^{-2\omega x}. \end{aligned}$$

▷ Réciproquement, si  $h'(x) = \lambda e^{-2\omega x}$ , alors en utilisant les calculs précédents, il vient

$$e^{-\omega x} (f'(x) - \omega f(x)) = \lambda e^{-2\omega x},$$

ce qui implique

$$f'(x) - \omega f(x) = \lambda e^{-\omega x}.$$

Ainsi, la fonction  $f$  est une solution de (9).

5. ▷ De la question précédente, il résulte que si  $f$  est une solution de (9), alors, pour tout réel  $x$ ,

$$h'(x) = \lambda e^{-2\omega x}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

En calculant les primitives sur  $\mathbb{R}$  des deux membres de cette égalité, nous en déduisons l'existence d'un réel  $a$  tel que, pour tout réel  $x$ ,

$$h(x) = -\frac{\lambda}{2\omega} e^{-2\omega x} + a,$$

c'est-à-dire

$$e^{-\omega x} f(x) = -\frac{\lambda}{2\omega} e^{-2\omega x} + a.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par  $e^{\omega x}$ , nous obtenons

$$f(x) = -\frac{\lambda}{2\omega} e^{-\omega x} + a e^{\omega x}.$$

En posant  $b = -\frac{\lambda}{2\omega}$ , nous en concluons qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = a e^{\omega x} + b e^{-\omega x}.$$

▷ Réciproquement, nous supposons que, pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = a e^{\omega x} + b e^{-\omega x}, \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

En utilisant les calculs de la question 1., nous vérifions que la fonction  $f$  est solution de l'équation différentielle (9).

Nous en concluons que les solutions de l'équation  $y'' = \omega^2 y$  sont les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = a e^{\omega x} + b e^{-\omega x}$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .