Correction du TD 15 **Intégration**

Calculs d'intégrales

Exercice 1 (★★☆☆) Aire d'un disque

1. Dans un repère orthonormal d'origine O, justifier qu'un point $M(x,y)$ appartient à un cercle de centre O et de rayon $r > 0$ si et seulement si

$$|y| = \sqrt{r^2 - x^2}, \text{ avec } x \in [-r,r].$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

2. Comment évaluer l'intégrale

$$J = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, dx\ ?$$

1. ▷ Un point $M(x,y)$ appartient à un cercle de centre O et de rayon $r > 0$ si et seulement si

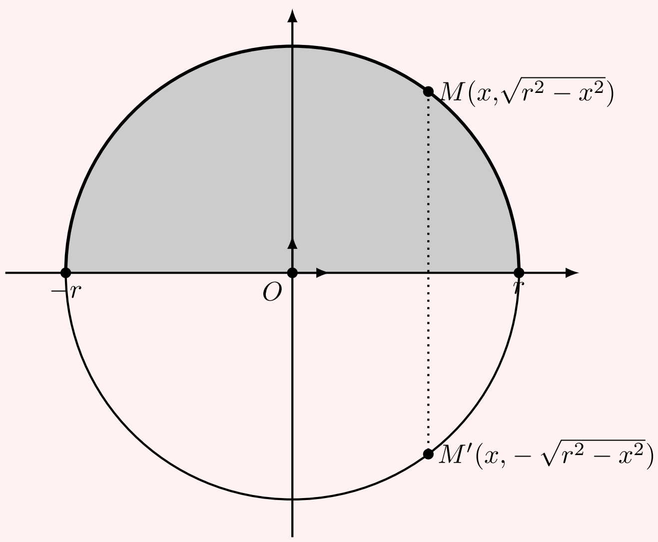
$$x^2 + y^2 = r^2 \iff y^2 = r^2 - x^2.$$

Cette dernière équation induit la condition

$$r^2 - x^2 \geqslant 0, \text{ c'est-à-dire } -r \leqslant x \leqslant r.$$

Par conséquent, un point $M(x,y)$ appartient à un cercle de centre O et de rayon $r > 0$ si et seulement si $|y| = \sqrt{r^2 - x^2}$, avec $x \in [-r,r]$.

▷ Nous disposons de la figure suivante :



Nous considérons la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{r^2 - x^2}$.
Cette fonction est définie, positive et continue sur l'intervalle $[-r,r]$.

Sa représentation graphique $\mathcal{C}_f$ d'équation $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ est le demi-cercle surligné sur la figure.

L'aire du demi-disque correspondant est égale à $\dfrac{\pi r^2}{2}$, ce qui est aussi égal à l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$.
Nous en concluons

$$\boxed{I = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi r^2}{2}.}$$

2. Nous considérons la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x(1-x)}$ qui est définie, positive et continue sur l'intervalle $[0,1]$.
Sa représentation graphique $\mathcal{C}_g$ a pour équation

$$y = \sqrt{x(1-x)},$$

ce qui équivaut à

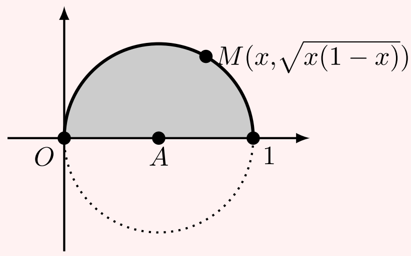
$$\begin{cases} y^2 = x(1-x) \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Or, nous avons

$$y^2 = x(1-x) \iff x^2 - x + y^2 = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Nous reconnaissons l'équation d'un cercle de centre le point $A\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ et de rayon $r = \dfrac{1}{2}$.

Nous en déduisons que $\mathcal{C}_g$ est le demi-cercle inclus dans ce cercle dont les points ont une ordonnée positive, comme surligné sur la figure qui suit.



L'aire du demi-disque correspondant est égale à

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}, \text{ dans l'unité d'aire,}$$

ce qui est aussi égal à l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_g$.
Nous en concluons

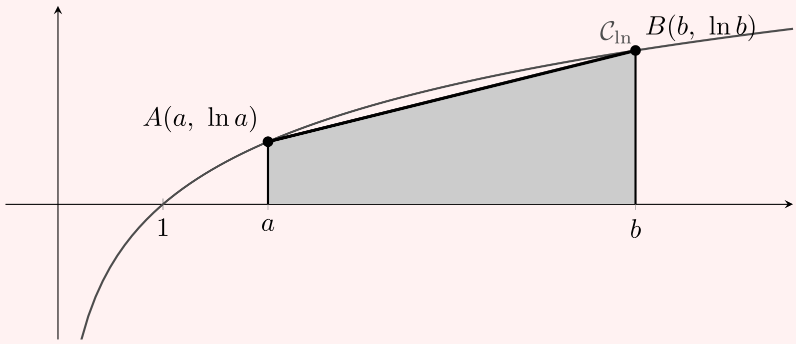
$$\boxed{J = \int_{0}^{1} \sqrt{x(1-x)}\, dx = \frac{\pi}{8}.}$$

Exercice 2 (★★★☆) Concavité de $\ln$

Soient deux réels a et b tels que $1 < a < b$.
Par des considérations d'aires, prouver l'inégalité

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x\, dx \geqslant \ln(\sqrt{ab}).$$

Nous représentons graphiquement la fonction $x \longmapsto \ln x$.



Puisque la fonction ln est concave, le segment $[AB]$ est en-dessous de la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ lorsque $x \in [a,b]$. Nous en déduisons que l'aire sous la courbe est supérieure à l'aire du trapèze grisé sur la figure, ce qui donne, dans l'unité d'aire,

$$\int_a^b \ln x \, dx \geqslant \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)(b-a).$$

Puisque $b - a > 0$, nous en déduisons

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x \, dx \geqslant \frac{1}{2}\ln(ab),$$

ce qui donne, en conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x \, dx \geqslant \ln(\sqrt{ab}).}$$

Exercice 3 (★★☆☆) Intégrales de fonctions trigonométriques

1. Pour chaque entier $k \geqslant 1$, déterminer sur $\mathbb{R}$, les primitives F_k de la fonction

$$f_k : x \longmapsto \sin x \cos^k x.$$

2. En remarquant que, pour tout réel x, $\sin^3 x = \sin x \times \sin^2 x$, calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\pi \sin^3 x \, dx.$$

3. Comment calculer l'intégrale

$$J = \int_0^\pi \sin^3 x \cos^2 x \, dx \ ?$$

1. Pour tout réel x, nous posons

$$u(x) = \cos x, \text{ ce qui donne } u'(x) = -\sin x.$$

Nous en déduisons

$$f_k(x) = -u'(x)u^k(x),$$

ce qui implique, pour tout réel x,

$$\boxed{F_k(x) = -\frac{1}{k+1}u^{k+1}(x) + c = -\frac{\cos^{k+1}(x)}{k+1} + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.}$$

2. Pour tout réel x, il vient

$$\sin^3 x = \sin x \times \sin^2 x = \sin x(1-\cos^2 x) = \sin x - \sin x \cos^2 x = \sin x - f_2(x).$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} (\sin x - f_2(x))\, dx \\
&= [-\cos x - F_2(x)]_0^{\pi} \\
&= -\cos \pi - F_2(\pi) + \cos 0 + F_2(0) \\
&= 1 + \frac{\cos^3 \pi}{3} + 1 - \frac{\cos^3 0}{3} \\
&= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } I = \frac{4}{3}.}$

3. Nous observons, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
\sin^3 x \cos^2 x &= \sin x \times \sin^2 x \cos^2 x \\
&= \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \\
&= \sin x \cos^2 x - \sin x \cos^4 x \\
&= f_2(x) - f_4(x).
\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\pi} (f_2(x) - f_4(x))\, dx \\
&= [F_2(x) - F_4(x)]_0^{\pi} \\
&= F_2(\pi) - F_4(\pi) - F_2(0) + F_4(0) \\
&= -\frac{\cos^3 \pi}{3} + \frac{\cos^5 \pi}{5} + \frac{\cos^3 0}{3} - \frac{\cos^5 0}{5} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \\
&= \frac{4}{15}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } J = \frac{4}{15}.}$

Exercice 4 (★★☆☆) Intégrales et fonction tangente

Calculer les intégrales

1. $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + \tan^3 x)\, dx.$

2. $J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right) dx.$

3. $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\, dx.$

1. *Calcul de* $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + \tan^3 x)\, dx.$

Pour tout réel $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, nous posons

$$u(x) = \tan x.$$

Ainsi, nous avons

$$u'(x) = 1 + \tan^2 x.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x(1+\tan^2 x)\,dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} u'(x)u(x)\,dx \\
&= \left[\frac{u^2(x)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \left[\frac{\tan^2(x)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } I = 0.}$

> *Remarque. Ce résultat n'est pas surprenant car l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en* 0 *est égale à* 0 *(cf. exercice 6).*

2. *Calcul de* $J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right) dx.$

Nous avons

$$J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}\,dx.$$

En utilisant le même changement de fonction, avec cette fois $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$, nous obtenons

$$J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{u'(x)}{u^2(x)}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} u'(x)u^{-2}(x)\,dx = \left[\frac{u^{-1}(x)}{-1}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}},$$

ce qui donne

$$J = \left[-\frac{1}{\tan x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\boxed{\text{Ainsi, } J = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.}$

3. *Calcul de* $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx.$

Nous observons

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x - 1)\,dx,$$

ce qui donne, avec le même changement de fonction, lorsque $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (u'(x) - 1)\,dx = [u(x) - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

$\boxed{\text{Ainsi, } K = 1 - \frac{\pi}{4}.}$

Exercice 5 (★★★☆) Changement de variable affine

Soit F une primitive d'une fonction f continue sur un intervalle I. Nous désignons par g la fonction affine définie sur $[a,b]$ par $t \longmapsto \alpha t + \beta$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Nous supposons que

$$\forall t \in [a,b], \quad \alpha t + \beta \in I.$$

1. Justifier que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\alpha} F(g(t))$ est une primitive sur $[a,b]$ de $t \longmapsto f(g(t))$.

2. En déduire l'égalité de « changement de variable affine »

$$\int_a^b f(\alpha t + \beta)\, dt = \frac{1}{\alpha} \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

3. *Un exemple pratique.* Soit un entier $n \geqslant 1$.
Calculer l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{(2t-1)^n}\, dt.$$

1. Par composition, cette fonction a pour dérivée sur $[a,b]$, la fonction

$$t \longmapsto \frac{1}{\alpha} g'(t) F'(g(t)),$$

soit

$$t \longmapsto \frac{1}{\alpha} \times \alpha \times f(\alpha t + \beta) = f(\alpha t + \beta),$$

ce qui justifie que $\boxed{\text{la fonction } t \longmapsto \frac{1}{\alpha} F(g(t)) \text{ est une primitive sur } [a,b] \text{ de } t \longmapsto f(g(t)).}$

2. Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\alpha t + \beta)\, dt &= \left[\frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)\right]_a^b \\ &= \frac{1}{\alpha}[F(\alpha b + \beta) - F(\alpha a + \beta)] \\ &= \frac{1}{\alpha}[F(u)]_{g(a)}^{g(b)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.\end{aligned}$$

> *Remarque. En pratique, nous effectuons un changement de variable en posant*
>
> $$u = \alpha t + \beta,$$
>
> *ce qui donne formellement*
>
> $$\frac{du}{dt} = \alpha, \text{ soit } dt = \frac{1}{\alpha}\, du.$$
>
> *Lorsque $t \in [a,b]$, la variable u est encadrée par les réels $\alpha a + \beta$ et $\alpha b + \beta$ (l'ordre de ces réels dépend du signe de α).*
> *Ainsi, nous obtenons*
>
> $$\int_a^b f(\alpha t + \beta)\, dt = \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(u) \frac{1}{\alpha}\, du = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(u)\, du.$$

3. *Calcul de $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(2t-1)^n}\, dt$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.*
En tenant compte de la remarque précédente, nous posons

$$u = 2t - 1,$$

ce qui donne

$$\frac{du}{dt} = 2, \text{ soit } dt = \frac{1}{2}\, du.$$

Lorsque $1 \leqslant t \leqslant 2$, nous avons $1 \leqslant u \leqslant 3$.
Il en résulte
$$I = \int_1^2 \frac{1}{(2t-1)^n}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{u^n}\,du.$$
Nous distinguons deux cas.
1$^{\text{er}}$ cas : $n = 1$.
$$I = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}[\ln u]_1^3 = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}.$$
$\boxed{\text{Dans ce cas, } I = \ln\sqrt{3}.}$
2$^{\text{e}}$ cas : $n \geqslant 2$.
$$I = \frac{1}{2}\int_1^3 u^{-n}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^3 = \frac{1}{2(1-n)}\left(\frac{1}{3^{n-1}} - 1\right).$$
$$\boxed{\text{Dans ce cas, } I = \frac{1}{2(1-n)}\left(\frac{1}{3^{n-1}} - 1\right).}$$

Exercice 6 (★★★☆) Parité et changement de variable

Nous utilisons dans cet exercice la méthode du changement de variable exposée lors de l'exercice précédent.

Soit f une fonction continue sur $[-a,a]$, avec $a > 0$.

1. **a)** Montrer que si f est paire, alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$
b) *Application.* Calculer l'intégrale
$$I = \int_{-1}^{1} \frac{|t|}{t^2+1}\,dt.$$
2. **a)** Montrer que si f est impaire, alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$
b) *Application.* Calculer l'intégrale
$$J = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x + 1}\,dx.$$

1. **a)** Nous avons
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$
En considérant l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$, nous posons
$$u = -x,$$
ce qui donne
$$\frac{du}{dx} = -1, \text{ soit } du = -dx.$$
De plus, $x = -a$ implique $u = a$, et $x = 0$ implique $u = 0$.

Puisque la fonction f est paire, nous en déduisons

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-u)\,(-du) = -\int_{a}^{0} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(u)\,du.$$

Il en résulte que

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.}$$

b) La fonction $t \longmapsto \dfrac{|t|}{t^2+1}$ qui est définie sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-1,1]$ est paire.
Il en résulte que

$$I = 2\int_{0}^{1} \frac{|t|}{t^2+1}\,dt = 2\int_{0}^{1} \frac{t}{t^2+1}\,dt.$$

Pour tout réel $t \in [-1,1]$, nous posons

$$u(t) = t^2+1, \text{ ce qui donne } u'(t) = 2t.$$

Ainsi, puisque $u(t) > 0$, nous avons

$$I = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{2}\frac{u'(t)}{u(t)}\,dt = [\ln(u(t))]_0^1 = \left[\ln(t^2+1)\right]_0^1 = \ln 2.$$

$\boxed{\text{Ainsi, } I = \ln 2.}$

2. **a)** Nous reprenons les mêmes calculs que dans la question **1.a)**, avec le même changement de variable.
Puisque f est impaire, il vient

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-u)\,(-du) = -\int_{a}^{0} (-f(u))\,du = -\int_{0}^{a} f(u)\,du,$$

ce qui donne

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.}$$

b) Sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\cos^3 x + 1}$ est impaire.

$$\boxed{J = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x + 1}\,dx = 0.}$$

> *Remarque. Ces deux propriétés peuvent également être prouvées en utilisant l'exercice 3 du TD 14 qui établit le lien entre parité et primitives.*

Exercice 7 (★★★☆)   Intégrale et équation différentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \frac{1-e^x}{1+e^x}.$$

1. Justifier que f est une solution de l'équation différentielle

$$2y' - 1 = (y-x)^2.$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{0}^{1} \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)^2 dx.$$

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme et quotient.
   Pour tout réel x, nous obtenons

$$f'(x) = 1 + \frac{-e^x(1+e^x) - (1-e^x)e^x}{(1+e^x)^2} = 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}.$$

   Nous en déduisons

$$\begin{aligned} 2f'(x) - 1 &= 1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{(e^x+1)^2 - 4e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \\ &= (f(x)-x)^2, \end{aligned}$$

   ce qui justifie que $\boxed{f \text{ est une solution de l'équation différentielle } 2y' - 1 = (y-x)^2.}$

2. Nous avons

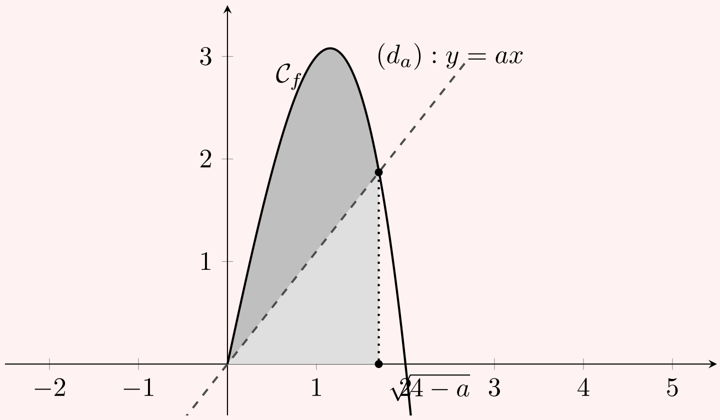
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)^2 dx \\ &= \int_0^1 (f(x)-x)^2\, dx \\ &= \int_0^1 (2f'(x)-1)\, dx \\ &= [2f(x)-x]_0^1 \\ &= 2f(1) - 1 - 2f(0) \\ &= 2f(1) - 1 \\ &= \frac{4}{1+e} - 1. \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Ainsi, } I = \frac{4}{1+e} - 1.}$

Exercice 8 (★★★☆) Aires égales

Soit f la fonction définie sur $[0,2]$ par $f(x) = 4x - x^3$.
Nous considérons la droite (d_a) d'équation $y = ax$, avec $a > 0$.
Déterminer pour quelle valeur du réel $a > 0$, la droite (d_a) partage l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ en deux parties d'aires égales.

▷ Pour commencer nous donnons la figure suivante.



▷ Nous déterminons l'abscisse strictement positive, en fonction de a, du point d'intersection, distinct de l'origine du repère, de la droite (d_a) avec la courbe $\mathcal{C}_f$.
Ce réel est solution dans l'intervalle [0,2] de l'équation

$$4x - x^3 = ax,$$

ce qui équivaut à

$$x^3 - x(4-a) = 0 \iff x\left(x^2 - (4-a)\right) = 0.$$

Puisque $x > 0$ et à condition que $0 < a < 4$, nous obtenons

$$x = \sqrt{4-a}.$$

▷ Nous déterminons à présent pour quelle valeur du réel $a \in]0,4[$, nous avons

$$2\int_0^{\sqrt{4-a}} (f(x) - ax)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx.$$

D'une part, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{4-a}} (f(x) - ax)\,dx &= \int_0^{\sqrt{4-a}} \left((4-a)x - x^3\right)dx \\ &= \left[\frac{4-a}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{4-a}} \\ &= \frac{(4-a)^2}{4}.\end{aligned}$$

D'autre part, nous obtenons

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4.$$

Ainsi, nous résolvons l'équation

$$2\frac{(4-a)^2}{4} = 4,$$

qui est équivalente à

$$(4-a)^2 = 8 \iff 4 - a = 2\sqrt{2} \text{ ou } 4 - a = -2\sqrt{2} \iff a = 4 - 2\sqrt{2} \text{ ou } a = 4 + 2\sqrt{2}.$$

Seule la solution $a = 4 - 2\sqrt{2} \in]0,4[$ convient puisque $4 + 2\sqrt{2} > 4$.

Nous en concluons que la droite $d_{4-2\sqrt{2}}$ partage l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ en deux parties d'aires égales.

Fonction définie par une intégrale

Exercice 9 (★★★☆) **Fonction** $x \longmapsto e^{-x} \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$

On considère les fonctions u et f définies sur $[1, +\infty[$ par

$$u(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \quad \text{et} \quad f(x) = e^{-x}u(x).$$

1. Justifier que f est dérivable sur $[1, +\infty[$.

2. Prouver que, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - f(x).$$

3. En déduire que, pour tout réel $a \in [1, +\infty[$,

$$\int_1^a f(x)\,dx = \ln a - f(a).$$

4. En utilisant la méthode des rectangles, déterminer un encadrement de l'intégrale

$$\int_1^2 f(x)\,dx.$$

1. La fonction u est dérivable sur $[1, +\infty[$ puisque c'est la primitive, sur cet intervalle, de la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^t}{t}$ satisfaisant à $u(1) = 0$.

$\boxed{\text{Nous en déduisons que } f \text{ est dérivable par composition et produit sur } [1, +\infty[.}$

2. Pour tout réel $x \geqslant 1$, nous avons

$$f'(x) = -e^{-x}u(x) + e^{-x}u'(x) = -e^{-x}u(x) + e^{-x}\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} - f(x).$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout réel } x \geqslant 1,\ f'(x) = \frac{1}{x} - f(x).}$$

3. De la question précédente, nous déduisons, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$f(x) = \frac{1}{x} - f'(x).$$

Par conséquent, pour tout réel $a \geqslant 1$, il vient

$$\int_1^a f(x)\,dx = \int_1^a \left(\frac{1}{x} - f'(x)\right) dx = [\ln x - f(x)]_1^a = \ln a - f(a) + f(1).$$

Puisque $f(1) = e^{-1}u(1) = 0$, nous en concluons

$$\boxed{\forall\, a \geqslant 1, \quad \int_1^a f(x)\,dx = \ln a - f(a).}$$

4. Nous avons

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \ln 2 - f(2) = \ln 2 - e^{-2}\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx.$$

Par conséquent, l'encadrement attendu est obtenu en disposant d'un encadrement de l'intégrale

$$J = \int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx.$$

Nous utilisons pour cela la fonction Python rect(f, a, b, n), où f est la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^x}{x}$.

```python
from math import *
def f(x):
    return exp(x)/x

def rect(f, a, b, n):
    h = (b-a)/n
    u, v = 0, 0
    x = a
    for i in range(n):
        u = u + h*f(x)
        x = x + h
        v = v + h*f(x)
    return (log(2) - exp(-2)*v, log(2) - exp(-2)*u)
```

Après exécution, nous obtenons

```
>>> rect(f, 1, 2, 100)
(0.2784780910976318, 0.2797992966859173)
```

$$\boxed{\text{Ainsi, } 0{,}278 \leqslant \int_1^2 f(x)\,dx \leqslant 0{,}280 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

Exercice 10 (★★★☆) Primitives et composition

1. Soient f une fonction continue sur $]0,+\infty[$ et F une primitive de f sur cet intervalle.
Quelle est la dérivée sur $]0,+\infty[$ de la fonction $g : x \longmapsto F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$?

2. Pour tout réel $x > 0$, nous posons

$$\varphi(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt.$$

Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\varphi(x) = 0$.

1. Par composition et différence, la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$.
Pour tout réel $x > 0$, nous obtenons

$$g'(x) = F'(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) F'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout réel } x > 0,\ g'(x) = f(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right).}$$

2. La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et admet donc sur cet intervalle une primitive F.
Nous en déduisons, pour tout réel $x > 0$,

$$\varphi(x) = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right).$$

En utilisant la première question, il vient

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\ln \frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{\ln x}{1+x^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Il en résulte qu'il existe un réel c tel que, pour tout réel $x > 0$,

$$\varphi(x) = c.$$

En particulier, pour $x = 1$, nous en déduisons

$$c = \varphi(1) = \int_1^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt = 0.$$

$\boxed{\text{Nous en concluons que pour tout réel } x > 0,\ \varphi(x) = 0.}$

Exercice 11 (★★★☆) Une équation fonctionnelle

Nous considérons les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ qui satisfont, pour tout réel x, à l'équation fonctionnelle (1)

$$f(x) + \int_0^x f(t)\, dt = x. \tag{1}$$

1. Justifier que si f est une solution de (1), alors cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$y' = -y + 1, \text{ avec la condition initiale } f(0) = 0.$$

2. En déduire que l'équation (1) admet une unique solution.

1. Si f est une solution de (1), alors en dérivant les deux membres de cette équation, nous obtenons, pour tout réel x,

$$f'(x) + f(x) = 1, \text{ soit } f'(x) = -f(x) + 1.$$

De plus, nous avons

$$f(0) = -\int_0^0 f(t)\, dt + 0 = 0.$$

$\boxed{\text{Ainsi, une solution } f \text{ de (1) est une solution de l'équation différentielle } y' = -y+1, \text{ avec la condition initiale } f(0) = 0.}$

2. En appliquant les résultats du cours, nous en déduisons, pour tout réel x,

$$f(x) = ce^{-x} - \frac{1}{-1} = ce^{-x} + 1, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

De plus, il vient

$$0 = f(0) = c + 1, \text{ ce qui implique } c = -1.$$

Par conséquent, si f est une solution de (1), alors f est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \longmapsto 1 - e^{-x}.$$

Réciproquement, la fonction $f : x \longmapsto 1 - e^{-x}$ satisfait à

$$\begin{aligned} 1 - e^{-x} + \int_0^x (1 - e^{-t})\, dt &= 1 - e^{-x} + \left[t + e^{-t}\right]_0^x \\ &= 1 - e^{-x} + (x + e^{-x} - 1) \\ &= x, \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est solution de (1).

$\boxed{\text{Nous en concluons que l'équation fonctionnelle (1) admet une unique solution définie sur } \mathbb{R}, \text{ qui est la fonction } f : x \longmapsto 1 - e^{-x}.}$

Exercice 12 (★★★★) Fonction arcsin

Soit la fonction F définie sur $]-1,1[$ par

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

1. **a)** Quel est le sens de variation de F sur l'intervalle $]-1,1[$?
b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_F$ à l'origine O du repère choisi.
c) La courbe $\mathcal{C}_F$ admet-elle un point d'inflexion ?
d) Quelle est la parité de la fonction F ?

2. En utilisant la méthode d'Euler décrite dans l'exercice 5 du TD 14, donner une allure de la courbe $\mathcal{C}_F$ lorsque $x \in [0,1[$.

3. Nous considérons à présent la fonction G définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par

$$G(x) = F(\sin x).$$

a) Justifier que

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad G(x) = x.$$

b) En déduire le calcul de l'intégrale

$$I = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

1. **a)** La fonction F est la primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $]-1,1[$ telle que $F(0) = 0$; elle est donc dérivable sur cet intervalle.
Pour tout réel $x \in]-1,1[$, nous avons

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0,$$

ce qui justifie $\boxed{\text{que } F \text{ est croissante strictement sur }]-1,1[.}$

b) Une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_F$ à l'origine O est

$$y = F'(0)x + F(0),$$

ce qui donne, puisque $F'(0) = 1$ et $F(0) = 0$,

$$\boxed{y = x.}$$

c) La fonction F est dérivable deux fois sur $]-1,1[$.

Puisque $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, nous en déduisons :

$$F''(x) = -\frac{1}{2} \times (-2x) \times (1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1} = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Par conséquent $F''(x)$ s'annule en 0 en changeant de signe, ce qui prouve que $\boxed{O \text{ est un point d'inflexion pour la courbe } \mathcal{C}_F.}$

Plus précisément, nous avons :

- ⋆ $F''(x) \leqslant 0$ pour $x \in]-1,0]$, donc F est concave sur cet intervalle.
- ⋆ $F''(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0,1[$, donc F est convexe sur $[0,1[$.

d) En utilisant l'exercice 3 du TD 14, puisque la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, définie sur $]-1,1[$, est paire et sachant que $F(0) = 0$, nous en déduisons $\boxed{\text{que } F \text{ est impaire.}}$

2. La fonction F est l'unique solution de l'équation différentielle

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ avec la condition initiale } F(0) = 0.$$

Soit un entier $n \geqslant 2$. Nous subdivisons l'intervalle $[0,1[$ avec un pas $h = \dfrac{1}{n}$ en posant

$$x_k = kh = \frac{k}{n}, \text{ avec } 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Comme $x_{k+1} = x_k + h$, avec $0 \leqslant k \leqslant n-2$, l'approximation affine tangente de F en x_k est

$$\begin{aligned} F(x_{k+1}) &= F(x_k + h) \\ &\approx F(x_k) + hF'(x_k) \\ &\approx F(x_k) + \frac{h}{\sqrt{1-x_k^2}} \\ &\approx F(x_k) + \frac{h}{\sqrt{1-k^2h^2}}. \end{aligned}$$

Pour $k \in [\![0,n-2]\!]$, nous considérons les points $M_k(x_k,y_k)$ tels que :

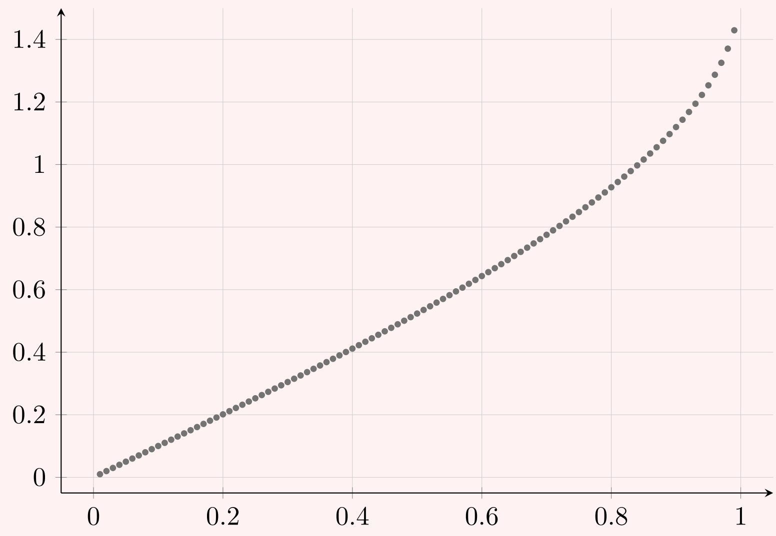
$$\begin{cases} x_0 = y_0 = 0 \\ x_{k+1} = x_k + h \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{\sqrt{1-k^2h^2}}. \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, avec un « pas » $h = \dfrac{1}{n}$, nous proposons le programme Python qui suit.

```python
from math import *
import matplotlib.pyplot as plt
b = float(input("b="))
n = int(input("n="))
h = b/n
L = []
K = []
x = 0
y = 0
for i in range(1, n-1):
    x = h*i
    y = y + h/(1 - i**2*h**2)**0.5
    L.append(x)
    K.append(y)
plt.scatter(L, K)
plt.grid()
plt.show()
```

Pour $b = 1$, nous choisissons par exemple $n = 100$.

Ceci donne, avec un pas $h = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$:



3. **a)** La fonction $G : x \longmapsto F(\sin x)$ est dérivable par composition sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout réel $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, sachant que $\cos x > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} G'(x) &= \sin'(x)F'(\sin x) \\ &= \cos x \times \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \\ &= \frac{\cos x}{|\cos x|} \\ &= \frac{\cos x}{\cos x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Nous en déduisons qu'il existe un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad G(x) = x + c.$$

En particulier, pour $x = 0$, nous obtenons

$$c = G(0) = F(\sin 0) = F(0) = 0,$$

ce qui établit, en conclusion,

$$\boxed{\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad G(x) = x.}$$

b) *Calcul de l'intégrale* $I = \displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$

Puisque, sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est paire, nous en déduisons

$$I = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 2F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2F\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{\text{Ainsi, } I = \dfrac{\pi}{2}.}$

En résumé, la fonction F est la fonction arcsinus, notée arcsin.
La fonction arcsin *est définie sur* $]-1,1[$, *à valeurs dans* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
Elle est impaire, dérivable sur $]-1,1[$ *et,*

$$\forall\, x \in\,]-1,1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Intégrales et inégalités

Exercice 13 (★★☆☆) Une bijection

1. Quel est le sens de variation sur $[1,+\infty[$ de la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{e^t}{t}$?
2. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement
$$\frac{e^n}{n} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{e^t}{t}\,dt \leqslant \frac{e^{n+1}}{n+1}.$$
3. Justifier que l'équation $\dfrac{e^x}{x} = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{e^t}{t}\,dt$ admet une seule solution u_n dans l'intervalle $[n,n+1]$.
4. Quelle est la limite de $\dfrac{u_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$?

1. La fonction f est dérivable par quotient sur $[1,+\infty[$.
Pour tout réel $t \geqslant 1$, nous obtenons
$$f'(t) = \frac{e^t \times t - e^t \times 1}{t^2} = \frac{e^t(t-1)}{t^2} \geqslant 0.$$
$\boxed{\text{Nous en déduisons que cette fonction est croissante strictement sur l'intervalle } [1,+\infty[.}$
2. Pour tout entier naturel n non nul, l'intervalle $[n,n+1]$ est inclus dans $[1,+\infty[$.
Puisque f est croissante sur $[1,+\infty[$, nous en déduisons
$$n \leqslant t \leqslant n+1 \implies f(n) \leqslant f(t) \leqslant f(n+1).$$
Par comparaison des intégrales, sachant que $n < n+1$, il vient
$$\int_n^{n+1} f(n)\,dt \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \int_n^{n+1} f(n+1)\,dt,$$
ce qui donne
$$f(n)\int_n^{n+1} dt \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n+1)\int_n^{n+1} dt,$$
c'est-à-dire
$$f(n) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n+1).$$
$\boxed{\text{Nous en concluons } \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \dfrac{e^n}{n} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{e^t}{t}\,dt \leqslant \frac{e^{n+1}}{n+1}.}$
3. Puisque la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[n,n+1]$, c'est une bijection de cet intervalle sur son intervalle image qui est
$$f([n,n+1]) = [f(n),f(n+1)] = \left[\frac{e^n}{n},\frac{e^{n+1}}{n+1}\right].$$

La question précédente a établi que le réel

$$\int_n^{n+1} \frac{e^t}{t}\,dt \in \left[\frac{e^n}{n}, \frac{e^{n+1}}{n+1}\right].$$

Par conséquent ce réel admet par f un unique antécédent $u_n \in [n,n+1]$.

$$\boxed{\text{Ceci justifie que, pour chaque entier } n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'équation } \frac{e^x}{x} = \int_n^{n+1} \frac{e^t}{t}\,dt \text{ admet une unique solution } u_n \text{ appartenant à l'intervalle } [n,n+1].}$$

4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$n \leqslant u_n \leqslant n+1, \text{ ce qui implique } 1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, par encadrement, nous obtenons

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1.}$$

> *Remarque. On dit que la suite (u_n) est équivalente à n, en $+\infty$, ce qui est noté*
>
> $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

Exercice 14 (★★★☆) Encadrement d'une intégrale

1. Justifier que, pour tout réel $x \in [e, +\infty[$,

$$1 \leqslant \ln x \leqslant \frac{x}{e}.$$

2. En déduire un encadrement de l'intégrale

$$I = \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\,dx.$$

3. Comparer une valeur approchée par défaut de cet encadrement avec celles qui sont fournies par la méthode des rectangles.

1. ▷ D'une part, puisque la fonction ln est croissante sur $]0, +\infty[$, nous en déduisons

$$x \geqslant e \implies \ln x \geqslant 1.$$

▷ D'autre part, nous posons $g(x) = \frac{x}{e} - \ln x$, avec $x \geqslant e$.
Cette fonction est dérivable par différence sur l'intervalle $[e, +\infty[$.
Nous obtenons, pour tout réel $x \geqslant e$,

$$g'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x} = \frac{x-e}{ex} \geqslant 0.$$

Il en résulte que g est croissante sur $[e, +\infty[$.

Par suite, nous avons

$$x \geqslant e \implies g(x) \geqslant g(e),$$

ce qui donne, puisque $g(e) = 0$,

$$g(x) \geqslant 0, \text{ soit } \frac{x}{e} \geqslant \ln x.$$

$$\boxed{\text{Nous en concluons } \forall\, x \in [e, +\infty[, \quad 1 \leqslant \ln x \leqslant \frac{x}{e}.}$$

2. La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc, pour tout réel $x \geqslant e$, il vient

$$1 \leqslant \sqrt{\ln x} \leqslant \sqrt{\frac{x}{e}}.$$

La fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$, par suite, pour tout réel $x \geqslant e$, nous en déduisons

$$\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \leqslant 1.$$

Par comparaison des intégrales, nous obtenons

$$\int_3^4 \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{x}}\, dx \leqslant I \leqslant \int_3^4 1\, dx.$$

Nous avons

$$\int_3^4 \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{e}\int_3^4 x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \sqrt{e}\left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_3^4 = \sqrt{e}\left[2\sqrt{x}\right]_3^4 = 2\sqrt{e}(2-\sqrt{3}),$$

ce qui établit l'encadrement suivant

$$\boxed{2\sqrt{e}(2-\sqrt{3}) \leqslant I \leqslant 1.}$$

3. Nous avons

$$0{,}883 < 2\sqrt{e}(2-\sqrt{3}) < 0{,}884,$$

ce qui indique qu'une valeur approchée par défaut de I est 0,883.
Nous utilisons la fonction Python `rect(f, a, b, n)`, ce qui donne

```python
from math import *
def f(x):
    return 1/(log(x))**0.5

def rect(f, a, b, n):
    h = (b-a)/n
    u, v = 0, 0
    x = a
    for i in range(n):
        u = u + h*f(x)
        x = x + h
        v = v + h*f(x)
    return (v, u)
```

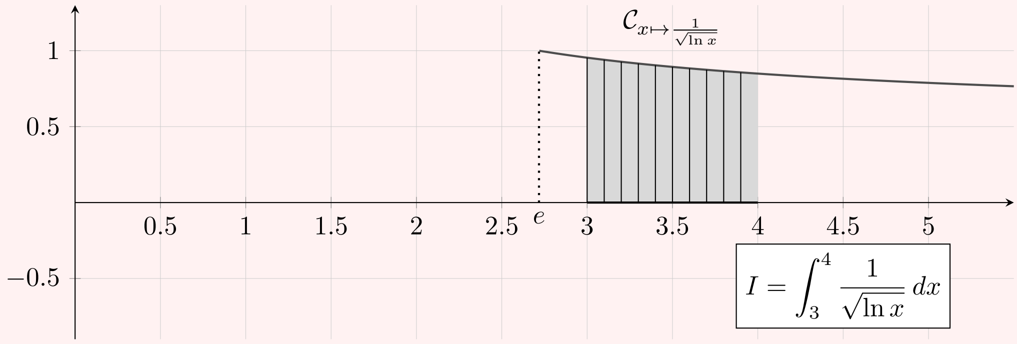
Avec $a = 3$, $b = 4$ et par exemple $n = 20$, nous obtenons

```
>>> rect(f, 3, 4, 20)
(0.8935520609740287, 0.8987892000596278)
```

ce qui donne par la méthode des rectangles, une valeur approchée par défaut de I égale à 0,893.

$\boxed{\text{Au centième près, le résultat précédent de 0,88 est assez satisfaisant.}}$

Graphiquement, nous avons :



Exercice 15 (★★★☆) Intégrale et fonction nulle

1. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \leqslant b$.
Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $\forall\, x \in [a,b],\ f(x) = 0$,
(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

2. *Une application.* Soit f une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}_+$.
Nous supposons qu'il existe un réel k tel que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) \leqslant k \int_0^x f(t)\,dt.$$

a) Quel est le sens de variation sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction

$$g : x \longmapsto e^{-kx} \int_0^x f(t)\,dt\ ?$$

b) En déduire

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = 0.$$

1. *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*.
Cette implication est immédiate car

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b 0\,dx = [c]_a^b = 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ *(i)*.
Soit F une primitive de f sur $[a,b]$.
Pour tout réel $x \in [a,b]$, nous avons

$$F'(x) = f(x) \geqslant 0,$$

ce qui implique que F est croissante sur $[a,b]$.
Nous en déduisons

$$a \leqslant x \leqslant b \implies F(a) \leqslant F(x) \leqslant F(b).$$

Or, nous savons

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = 0.$$

Par suite, en posant $c = F(a) = F(b)$, nous obtenons

$$\forall\, x \in [a,b], \quad c \leqslant F(x) \leqslant c,$$

ce qui induit, pour tout réel $x \in [a,b]$,

$$F(x) = c,$$

ce qui établit que

$$F'(x) = f(x) = 0.$$

$\boxed{\text{Les propositions } (i) \text{ et } (ii) \text{ sont bien équivalentes.}}$

2. **a)** La fonction g est dérivable par composition et produit sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout réel $x \geqslant 0$, nous obtenons

$$g'(x) = -ke^{-kx} \int_0^x f(t)\,dt + e^{-kx} f(x) = e^{-kx}\left(f(x) - k\int_0^x f(t)\,dt\right).$$

Puisque

$$f(x) \leqslant k \int_0^x f(t)\,dt,$$

nous en déduisons

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) \leqslant 0,$$

ce qui justifie $\boxed{\text{que la fonction } g \text{ est décroissante sur } [0,+\infty[.}$

b) Comme $g(0) = 0$, nous en déduisons

$$x \geqslant 0 \implies g(x) \leqslant g(0), \text{ soit } g(x) \leqslant 0.$$

Par ailleurs, puisque

$$\forall\, x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0,$$

par positivité de l'intégrale, nous avons

$$\int_0^x f(t)\,dt \geqslant 0,$$

ce qui implique

$$\forall\, x \geqslant 0,\ g(x) \geqslant 0.$$

Des deux inégalités $g(x) \leqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$, il résulte que

$$\forall\, x \geqslant 0,\ g(x) = 0.$$

Puisque $e^{-kx} > 0$, pour tout réel $x \geqslant 0$ et pour tout $t \in [0,x]$, nous avons

$$\int_0^x f(t)\,dt = 0.$$

En appliquant la question **1.**, nous en déduisons, pour tout réel $x \geqslant 0$ et pour tout $t \in [0,x]$,

$$f(t) = 0,$$

ce qui prouve

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = 0.}$$

Exercice 16 (★★★☆) Inégalité des accroissements finis

Cette inégalité a déjà été démontrée. Nous proposons d'en donner une autre preuve en utilisant le calcul intégral.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Nous supposons qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}_+^*$ telle que,

$$\forall\, x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant k.$$

En remarquant que, quels que soient les réels a et b appartenant à I, nous avons

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx,$$

justifier que

$$|f(b) - f(a)| \leqslant k|b - a|.$$

Par disjonction, nous distinguons les deux cas suivants : $a \leqslant b$ ou $a > b$.
1er cas : $a \leqslant b$.
En utilisant le corollaire du cours, il vient

$$|f(b) - f(a)| = \left| \int_a^b f'(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

Puisque, pour tout réel $x \in [a,b] \subset I$, nous avons $|f'(x)| \leqslant k$, nous en déduisons, par comparaison des intégrales,

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx \leqslant \int_a^b k\,dx.$$

Comme $\displaystyle\int_a^b k\,dx = k(b-a)$, il vient

$$|f(b) - f(a)| \leqslant k(b-a).$$

Or, nous savons que $a \leqslant b$. Il en résulte

$$b - a = |b - a|,$$

ce qui justifie, dans ce premier cas, l'inégalité attendue,

$$|f(b) - f(a)| \leqslant k|b - a|.$$

2e cas : $a > b$.
Nous avons

$$|f(b) - f(a)| = \left| \int_a^b f'(x)\,dx \right| = \left| \int_b^a f'(x)\,dx \right|,$$

ce qui implique

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \int_b^a |f'(x)|\,dx \leqslant \int_b^a k\,dx.$$

Ainsi, nous obtenons

$$|f(b) - f(a)| \leqslant k(a-b).$$

Sachant que $a > b$, il vient

$$a - b = |a - b| = |b - a|,$$

ce qui, dans ce cas, prouve

$$|f(b) - f(a)| \leqslant k|b - a|.$$

L'étude de ces deux cas permet de conclure par

$$\boxed{\forall\, a \in I, \forall\, b \in I, \quad |f(b) - f(a)| \leqslant k|b - a|.}$$

Exercice 17 (★★★★) Inégalité de Cauchy–Schwarz

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$.

1. En supposant que $a < b$, nous considérons le trinôme du second degré

$$P : \lambda \longmapsto \int_a^b (\lambda f(t) + g(t))^2\,dt.$$

En posant
$$A=\int_a^b f^2(t)\,dt,\quad B=\int_a^b f(t)g(t)\,dt\quad \text{et}\quad C=\int_a^b g^2(t)\,dt,$$
et en supposant que $A\neq 0$, prouver l'inégalité
$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2\leqslant \int_a^b f^2(t)\,dt\times\int_a^b g^2(t)\,dt.$$

2. Justifier que l'inégalité de Cauchy–Schwarz est vraie, quels que soient les réels a et b.

3. Examiner le cas où $A=0$.
Dans quels cas l'égalité est-elle atteinte ?

4. *Une application.* Justifier que
$$\int_0^1 \sqrt{1+x^7}\,dx\leqslant \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$
Comparer ce majorant avec celui qui est fourni par la méthode des rectangles.

1. Nous supposons que $a<b$.
Pour tout réel λ, par linéarité, nous avons
$$\begin{aligned}P(\lambda)&=\int_a^b\left(\lambda^2f^2(t)+2\lambda f(t)g(t)+g^2(t)\right)dt\\&=\lambda^2\int_a^b f^2(t)\,dt+2\lambda\int_a^b f(t)g(t)\,dt+\int_a^b g^2(t)\,dt\\&=A\lambda^2+2B\lambda+C.\end{aligned}$$
Le discriminant réduit de ce trinôme du second degré (car $A>0$) est
$$\Delta'=B^2-AC.$$
Par positivité de l'intégrale, nous avons
$$\forall\,\lambda\in\mathbb{R},\ P(\lambda)\geqslant 0,$$
ce qui implique
$$\Delta'\leqslant 0,\ \text{c'est-à-dire}\ B^2\leqslant AC.$$

Nous en concluons que si $a<b$, alors $\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(t)\,dt\times\int_a^b g^2(t)\,dt.$

2.
- ▷ Si $a=b$, alors chacun des deux membres de l'inégalité attendue est nul, ce qui justifie, dans ce cas, que l'inégalité est vraie.
- ▷ Si $a>b$, alors en échangeant les rôles des réels a et b, nous obtenons
$$\left(\int_b^a f(t)g(t)\,dt\right)^2\leqslant\int_b^a f^2(t)\,dt\times\int_b^a g^2(t)\,dt,$$
ce qui donne
$$\left(-\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2\leqslant\left(-\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\times\left(-\int_a^b g^2(t)\,dt\right),$$
soit
$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(t)\,dt\times\int_a^b g^2(t)\,dt.$$

Nous en concluons, quels que soient les réels a et b, que l'inégalité de Cauchy–Schwarz est vraie.

3. ▷ Si $A = 0$, alors

$$\int_a^b f^2(t)\,dt = 0, \text{ avec } t \longmapsto f^2(t) \text{ continue et positive sur } [a,b].$$

En utilisant la première question de l'exercice 15, nous en déduisons, pour tout réel $t \in [a,b]$,

$$f^2(t) = 0, \text{ ce qui implique } f(t) = 0,$$

ce qui établit que l'inégalité de Cauchy–Schwarz est encore vraie dans ce cas.

▷ L'égalité est atteinte si et seulement si $\Delta' = 0$.
Il en résulte qu'il existe un réel λ_0 tel que

$$P(\lambda_0) = 0, \text{ soit } \int_a^b (\lambda_0 f(t) + g(t))^2\,dt = 0.$$

En utilisant à nouveau la première question de l'exercice 15, avec cette fois la fonction $t \longmapsto (\lambda_0 f(t) + g(t))^2$ continue et positive sur $[a,b]$, nous obtenons, pour tout réel $t \in [a,b]$,

$$(\lambda_0 f(t) + g(t))^2 = 0, \text{ soit } \lambda_0 f(t) + g(t) = 0,$$

c'est-à-dire

$$g(t) = -\lambda_0 f(t).$$

En d'autres termes, l'égalité est atteinte si et seulement si les fonctions f et g sont proportionnelles.

4. ▷ Nous appliquons l'inégalité de Cauchy–Schwarz lorsque, pour tout réel $t \in [0,1]$, nous choisissons en particulier

$$f(t) = \sqrt{1 + x^7} \text{ et } g(t) = 1.$$

Nous obtenons

$$\left(\int_0^1 \sqrt{1 + x^7} \times 1\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 \left(\sqrt{1 + x^7}\right)^2 dx \times \int_0^1 1^2\,dx,$$

ce qui donne

$$\left(\int_0^1 \sqrt{1 + x^7}\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 (1 + x^7)\,dx.$$

Nous avons

$$\int_0^1 (1 + x^7)\,dx = \left[x + \frac{x^8}{8}\right]_0^1 = \frac{9}{8},$$

ce qui induit

$$\left(\int_0^1 \sqrt{1 + x^7}\,dx\right)^2 \leqslant \frac{9}{8}.$$

Puisque, par positivité, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + x^7}\,dx \geqslant 0$, nous en concluons

$$\boxed{\int_0^1 \sqrt{1 + x^7}\,dx \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{4}.}$$

▷ Nous utilisons la fonction Python `rect(f, a, b, n)`, ce qui donne

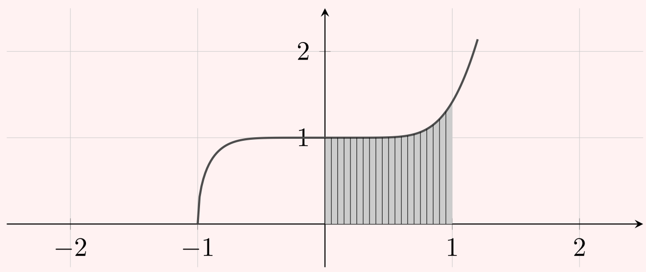
```python
from math import *
def f(x):
    return (1+x**7)**0.5

def rect(f, a, b, n):
    h = (b-a)/n
    u, v = 0, 0
    x = a
    for i in range(n):
        u = u + h*f(x)
        x = x + h
        v = v + h*f(x)
    return (u, v)
```

Avec $a = 0$, $b = 1$ et par exemple $n = 100$, nous obtenons

```
>>> rect(f, 0, 1, 100)
(1.054082373452815, 1.0582245090765463)
```

Puisque $\dfrac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1{,}06$, nous en concluons que le majorant obtenu par l'inégalité de Cauchy–Schwarz est une approximation satisfaisante de l'intégrale proposée.

Graphiquement, nous avons :



Suites et intégrales

Exercice 18 (★★☆☆) Intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt.$$

1. **a)** Calculer u_0 et u_1.

b) Pour tout entier naturel n, quel est le signe de u_n ?

c) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

2. **a)** Justifier que, pour tout entier naturel n et pour tout réel $t \in [0{,}1]$,

$$\frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t}.$$

b) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ln 2.$$

c) La suite (u_n) est-elle convergente ?

3. **a)** Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln 2 - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

1. **a)** ▷ *Calcul de u_0.*

Nous obtenons

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t}\,dt = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}.$$

$\boxed{\text{Ainsi, } u_0 = \ln \frac{3}{2}.}$

▷ *Calcul de u_1.*

$$u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+2t}\,dt.$$

En posant, pour tout réel $t \in [0,1]$,

$$u(t) = 2t + 1 > 0, \text{ il vient } u'(t) = 2.$$

Nous en déduisons

$$u_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u'(t)}{u(t)}\,dt = \frac{1}{2}[\ln u(t)]_0^1 = \frac{1}{2}[\ln(2t+1)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}.$$

$\boxed{\text{Ainsi, } u_1 = \ln \sqrt{3}.}$

b) Puisque, quel que soit le réel $t \in [0,1]$,

$$\frac{1}{1+t+t^n} \geqslant 0,$$

par positivité, sachant que $0 < 1$, il vient

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt \geqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0.}$$

c) Pour tout entier naturel n, nous avons

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^{n+1}}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t+t^{n+1}} - \frac{1}{1+t+t^n}\right)dt \\ &= \int_0^1 \frac{1+t+t^n - (1+t+t^{n+1})}{(1+t+t^{n+1})(1+t+t^n)}\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n(1-t)}{(1+t+t^{n+1})(1+t+t^n)}\,dt. \end{aligned}$$

Puisque $t \in [0,1]$, nous avons

$$\frac{t^n(1-t)}{(1+t+t^{n+1})(1+t+t^n)} \geqslant 0,$$

ce qui prouve, par positivité de l'intégrale, que

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n.$$

$\boxed{\text{Nous en concluons que la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

2. **a)** Pour tout entier naturel n et tout réel $t \in [0{,}1]$, nous avons

$$1 + t + t^n \geqslant 1 + t > 0.$$

La décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$ implique

$$\boxed{\frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t}.}$$

b) Par comparaison des intégrales, sachant que $0 < 1$, nous obtenons

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\, dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt.$$

Puisque

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2,$$

nous en concluons

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ln 2.}$$

c) La suite (u_n) est croissante et majorée par $\ln 2$. Par conséquent, cette suite est convergente.

3. **a)** En reprenant le calcul précédent, nous avons

$$\begin{aligned}
\ln 2 - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\, dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{1+t+t^n-(1+t)}{(1+t+t^n)(1+t)}\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t+t^n)(1+t)}\, dt.
\end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n et tout réel $t \in [0{,}1]$, nous avons

$$1 + t + t^n \geqslant 1 \text{ et } 1 + t \geqslant 1,$$

ce qui implique

$$(1+t+t^n)(1+t) \geqslant 1.$$

Puisque la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$, il vient

$$\frac{1}{(1+t+t^n)(1+t)} \leqslant 1.$$

De plus, $t^n \geqslant 0$, ce qui induit

$$\frac{t^n}{(1+t+t^n)(1+t)} \leqslant t^n.$$

Par comparaison des intégrales, nous en déduisons

$$\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t+t^n)(1+t)}\, dt \leqslant \int_0^1 t^n\, dt,$$

ce qui démontre, puisque $\displaystyle\int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1}$,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \ln 2 - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.}$$

b) Pour tout entier naturel n, nous disposons de l'encadrement

$$0 \leqslant \ln 2 - u_n \leqslant \frac{1}{n+1},$$

ce qui donne

$$\ln 2 - \frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \ln 2.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\ln 2 - \dfrac{1}{n+1}\right) = \ln 2$, nous en concluons

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2.}$$

Exercice 19 (★★★☆) Une suite définie par une intégrale

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{1-2x}}{1+e^{-2x}}.$$

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \int_0^1 f(x) e^{\frac{x}{n}}\,dx.$$

a) Quel est, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le signe de u_n ?

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c) Cette suite est-elle convergente ?

3. **a)** Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I \leqslant u_n \leqslant e^{\frac{1}{n}} I.$$

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

c) Proposer un algorithme qui restitue un rang N à partir duquel le réel u_N est proche de I à 10^{-P} près.

1. Nous remarquons

$$I = e \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\,dx.$$

Pour tout réel $x \in [0,1]$, nous posons

$$u(x) = 1 + e^{-2x} > 0, \text{ ce qui donne } u'(x) = -2e^{-2x}.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{e}{2} \int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx \\
&= -\frac{e}{2} [\ln(u(x))]_0^1 \\
&= -\frac{e}{2} \left[\ln(1+e^{-2x})\right]_0^1 \\
&= -\frac{e}{2} \left(\ln(1+e^{-2}) - \ln 2\right) \\
&= \frac{e}{2} \left(\ln 2 - \ln(1+e^{-2})\right) \\
&= \frac{e}{2} \ln\left(\frac{2}{1+e^{-2}}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } I = \frac{e}{2}\ln\left(\frac{2}{1+e^{-2}}\right).}$$

2. **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, nous avons

$$f(x)e^{\frac{x}{n}} \geqslant 0,$$

ce qui justifie, par positivité de l'intégrale, avec $0 < 1$,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geqslant 0.}$$

b) Pour tout entier naturel n non nul, par linéarité, nous obtenons

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n+1}}\,dx - \int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n}}\,dx \\ &= \int_0^1 f(x)\left(e^{\frac{x}{n+1}} - e^{\frac{x}{n}}\right)dx. \end{aligned}$$

Puisque $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$n+1 \geqslant n > 0, \text{ donc } \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n},$$

ce qui implique, pour tout réel $x \in [0,1]$,

$$\frac{x}{n+1} \leqslant \frac{x}{n}.$$

La fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$. Il en résulte

$$\exp\left(\frac{x}{n+1}\right) \leqslant \exp\left(\frac{x}{n}\right),$$

ce qui justifie

$$f(x)\left(e^{\frac{x}{n+1}} - e^{\frac{x}{n}}\right) \leqslant 0.$$

Par positivité de l'intégrale, avec $0 < 1$, nous en déduisons

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0, \text{ c'est-à-dire } u_{n+1} \leqslant u_n.$$

$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

c) $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante et minorée par } 0\text{ ; cette dernière est donc convergente.}}$

3. **a)** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$. Nous avons

$$0 \leqslant \frac{x}{n} \leqslant \frac{1}{n},$$

ce qui implique, puisque exp est croissante sur $\mathbb{R}$,

$$1 \leqslant \exp\left(\frac{x}{n}\right) \leqslant \exp\left(\frac{1}{n}\right).$$

De plus, $f(x) > 0$, ce qui donne

$$f(x) \leqslant f(x)\exp\left(\frac{x}{n}\right) \leqslant f(x)\exp\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par comparaison des intégrales, avec $0 < 1$, il vient

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)\exp\left(\frac{x}{n}\right)dx \leqslant \int_0^1 f(x)\exp\left(\frac{1}{n}\right)dx,$$

c'est-à-dire, pour conclure,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I \leqslant u_n \leqslant e^{\frac{1}{n}} I.}$$

b) Puisque, par composition, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1,$$

nous en déduisons, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = I.}$$

c) Pour mettre en place cet algorithme, pour tout entier n non nul, nous déduisons de l'encadrement précédent,

$$0 \leqslant u_n - I \leqslant I(e^{\frac{1}{n}} - 1).$$

Par suite, pour que u_N soit proche de I à 10^{-P} près, il suffit que

$$I(e^{\frac{1}{N}} - 1) < 10^{-P}.$$

L'entier P étant choisi, nous proposons l'algorithme suivant.

```python
from math import *
p = int(input("p="))
n = 1
I = (exp(1)/2) * log(2/(1+exp(-2)))
while I*(exp(1/n)-1) >= 10**(-p):
    n = n+1
print("n=", n, "pour p=", p)
```

Après exécution du programme, nous obtenons par exemple

```
>>> n = 9 pour p = 1.
>>> n = 78 pour p = 2.
>>> n = 771 pour p = 3.
>>> n = 7697 pour p = 4.
```

Exercice 20 (★★★☆) Une suite définie par une somme

1. Quel est le sens de variation sur l'intervalle $]1, +\infty[$ de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x\ln x} \ ?$$

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, nous posons

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}.$$

Justifier que, pour tout entier naturel $k \geqslant 3$,

$$\frac{1}{k\ln k} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{(k-1)\ln(k-1)}.$$

3. En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$S_n - \frac{1}{2\ln 2} \leqslant \int_{2}^{n} f(x)\,dx \leqslant S_n - \frac{1}{n\ln n}.$$

4. Établir que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \leqslant S_n \leqslant \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{2\ln 2}.$$

Quelle est la limite de la suite (S_n) quand n tend vers $+\infty$?

5. Quelle est la limite de $\dfrac{S_n}{\ln(\ln n)}$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

1. Cette fonction est dérivable sur $]1,+\infty[$ par produit et inverse.
Pour tout réel $x>1$, nous obtenons

$$f'(x) = -\frac{\ln x + x \times \frac{1}{x}}{(x\ln x)^2} = -\frac{\ln x + 1}{(x\ln x)^2}.$$

Puisque, pour tout réel $x>1$, $\ln x > 0$, il en résulte

$$f'(x) < 0,$$

ce qui établit $\boxed{\text{que la fonction } f \text{ est décroissante strictement sur }]1,+\infty[.}$

2. Pour tout entier $k \geqslant 3$, nous avons $[k-1,k] \subset]1,+\infty[$.
Soit un réel $x \in [k-1,k]$. Puisque f est décroissante sur $]1,+\infty[$, nous en déduisons

$$k-1 \leqslant x \leqslant k \implies f(k) \leqslant f(x) \leqslant f(k-1).$$

Par comparaison des intégrales, puisque pour $k \geqslant 3$, $k-1<k$, nous obtenons

$$\int_{k-1}^{k} f(k)\,dx \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dx,$$

ce qui donne

$$f(k)\int_{k-1}^{k} dx \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant f(k-1)\int_{k-1}^{k} dx,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{1}{k\ln k} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{(k-1)\ln(k-1)}.}$$

3. Pour k variant de 3 à $n \geqslant 3$, nous additionnons membres à membres l'encadrement précédent, ce qui donne

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln k} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)\ln(k-1)}.$$

D'une part, nous avons

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln k} = S_n - \frac{1}{2\ln 2}.$$

D'autre part, on a

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)\ln(k-1)} = S_n - \frac{1}{n\ln n}.$$

De plus, par la relation de Chasles, nous obtenons

$$\sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_{2}^{n} f(x)\,dx.$$

Pour tout entier $n \geqslant 3$, nous en déduisons

$$S_n - \frac{1}{2\ln 2} \leqslant \int_{2}^{n} f(x)\,dx \leqslant S_n - \frac{1}{n\ln n}.$$

Puisque cet encadrement demeure vrai lorsque $n = 2$, nous en concluons $\boxed{\text{qu'il est acquis quel que soit l'entier naturel } n \geqslant 2.}$

4. Soit un entier $n \geqslant 2$. De la double inégalité précédente, il résulte

$$\int_{2}^{n} f(x)\,dx + \frac{1}{n\ln n} \leqslant S_n \leqslant \int_{2}^{n} f(x)\,dx + \frac{1}{2\ln 2}.$$

Nous calculons à présent l'intégrale $\displaystyle\int_2^n f(x)\,dx$.

Pour tout réel $x \in [2,n]$, en posant

$$u(x) = \ln x > 0, \text{ donc } u'(x) = \frac{1}{x},$$

il vient

$$\int_2^n f(x)\,dx = \int_2^n \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = [\ln u(x)]_2^n = [\ln(\ln x)]_2^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2).$$

Il en résulte

$$\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{n\ln n} \leqslant S_n \leqslant \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{2\ln 2}.$$

En remarquant que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{n\ln n} \geqslant \ln(\ln n) - \ln(\ln 2),$$

nous en concluons

$$\boxed{\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \leqslant S_n \leqslant \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{2\ln 2}.}$$

Puisque, pour $n \geqslant 2$,

$$S_n \geqslant \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) = +\infty,$$

par comparaison, nous obtenons

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.}$$

5. Pour $n \geqslant 3$, nous divisons par $\ln(\ln n) > 0$ chaque membre de l'encadrement ci-dessus. Il vient

$$1 - \frac{\ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)} \leqslant \frac{S_n}{\ln(\ln n)} \leqslant 1 - \frac{\ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)} + \frac{1}{(2\ln 2)\ln(\ln n)}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln n) = +\infty$, nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)} + \frac{1}{(2\ln 2)\ln(\ln n)}\right) = 1,$$

ce qui prouve, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln n)} = 1.}$$

Remarque. Dans le langage des suites équivalentes, $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln n)$*, ce qui signifie que la divergence de la suite* (S_n) *vers* $+\infty$ *est très lente. Par exemple,* $\ln(\ln 10000) \approx 2{,}22$.

Exercice 21 (★★★★) Une approximation de π

Nous considérons deux suites (I_n) et (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x\,dx \quad \text{et} \quad u_n = I_n + I_{n+1}.$$

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

3. Justifier que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant u_n.$$

En déduire que la suite (I_n) converge et donner sa limite.

4. Pour tout entier naturel n, nous posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k.$$

Établir que, pour tout entier naturel n,

$$S_n = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.$$

5. En déduire

$$|4S_n - \pi| \leqslant \frac{4}{2n+3}.$$

6. Quelle est la limite de la suite $(4S_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

7. Proposer un algorithme qui restitue un entier N tel que $4S_N$ soit une valeur approchée de π à 10^{-P} près.

1. ▷ *Calcul de I_0.*

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

▷ *Calcul de I_1.*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x - 1)\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan' x - 1)\, dx \\ &= [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} \\ &= 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } I_0 = \frac{\pi}{4} \text{ et } I_1 = 1 - \frac{\pi}{4}.}$$

2. Pour tout entier naturel n, par linéarité, nous avons

$$\begin{aligned} u_n = I_n + I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2(n+1)} x\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^{2n} x + \tan^{2n+2} x)\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x(1 + \tan^2 x)\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan' x \tan^{2n} x\, dx \\ &= \left[\frac{\tan^{2n+1} x}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2n+1}.}$$

3. ▷ D'une part, puisque

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \ \tan^{2n} x \geqslant 0,$$

par positivité de l'intégrale, avec $0 < \frac{\pi}{4}$, nous en déduisons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \geqslant 0.$$

D'autre part, puisque pour tout entier naturel n, $I_{n+1} \geqslant 0$, il vient

$$I_n \leqslant I_n + I_{n+1},$$

ce qui implique $I_n \leqslant u_n$. Nous en concluons

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant u_n.}$$

▷ Nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Par encadrement, $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ converge vers } 0.}$

4. Nous prouvons par récurrence que, pour tout entier n,

$$S_n = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.$$

Initialisation.
Nous avons

$$S_0 = (-1)^0 u_0 = I_0 + I_1 = I_0 + (-1)^0 I_1,$$

ce qui justifie l'égalité proposée au rang $n = 0$.

Hérédité.
Nous supposons qu'à un rang $n \in \mathbb{N}$, fixé, $S_n = I_0 + (-1)^n I_{n+1}$. Nous montrons que

$$S_{n+1} = I_0 + (-1)^{n+1} I_{n+2}.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (-1)^{n+1} u_{n+1} \\ &= I_0 + (-1)^n I_{n+1} + (-1)^{n+1}(I_{n+1} + I_{n+2}) \\ &= I_0 + (-1)^n I_{n+1} - (-1)^n I_{n+1} + (-1)^{n+1} I_{n+2} \\ &= I_0 + (-1)^{n+1} I_{n+2}. \end{aligned}$$

L'égalité attendue est ainsi héréditaire. En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.}$$

5. Pour tout entier naturel n, puisque $I_0 = \frac{\pi}{4}$, nous avons

$$4S_n = 4I_0 + 4(-1)^n I_{n+1} = \pi + 4(-1)^n I_{n+1}.$$

Sachant que $I_{n+1} \geqslant 0$, nous en déduisons

$$|4S_n - \pi| = |4(-1)^n I_{n+1}| = 4\,|(-1)^n|\, I_{n+1} = 4I_{n+1}.$$

Nous savons également que, quel que soit l'entier naturel n,

$$I_{n+1} \leqslant u_{n+1}, \text{ soit } 4I_{n+1} \leqslant \frac{4}{2n+3},$$

ce qui permet d'établir l'inégalité

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |4S_n - \pi| \leqslant \frac{4}{2n+3}.}$$

6. Pour tout entier naturel n, cette dernière inégalité équivaut à

$$-\frac{4}{2n+3} \leqslant 4S_n - \pi \leqslant \frac{4}{2n+3}, \text{ soit } -\frac{4}{2n+3} + \pi \leqslant 4S_n \leqslant \frac{4}{2n+3} + \pi.$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{2n+3} + \pi\right) = \pi = \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{4}{2n+3} + \pi\right),$$

par encadrement, nous en concluons

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} 4S_n = \pi.}$$

7. En observant que, l'entier P étant choisi, la condition

$$\frac{4}{2n+3} < 10^{-P} \text{ est suffisante pour que } |4S_n - \pi| \leqslant 10^{-P},$$

nous proposons l'algorithme suivant.

```python
from math import *
p = int(input("p="))
n = 0
s = 0
while 4/(2*n+3) >= 10**(-p):
    s = s + 4*(-1)**n/(2*n+1)
    n = n+1
print("n=", n, "pour p=", p)
print("s=", s)
```

En donnant à p des valeurs entre 1 et 5, nous obtenons

```
>>> n = 19 pour p = 1, s = 3.1941879092319425.
>>> n = 199 pour p = 2, s = 3.146617747495458.
>>> n = 1999 pour p = 3, s = 3.1420929036835568.
>>> n = 19999 pour p = 4, s = 3.1416426560898874.
>>> n = 199999 pour p = 5, s = 3.141597653614762.
```

> *Remarque. Cette somme converge très lentement puisque* 200 000 *itérations sont nécessaires pour obtenir les cinq premières décimales de* π*.*

Exercice 22 (★★★★) Série harmonique — Constante d'Euler

Soit la suite (h_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Justifier que, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k}.$$

2. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n} + \ln n \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln n.$$

3. La suite (h_n) converge-t-elle ?

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, nous posons $u_n = h_n - \ln n$.
Prouver que, quel que soit l'entier $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

5. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

6. En déduire que cette suite est convergente.

1. Soient un entier $k \geqslant 1$ et un réel $x \in [k,k+1]$.
Puisque la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$, nous avons

$$k \leqslant x \leqslant k+1 \implies \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Par comparaison des intégrales, avec $k < k+1$, nous en déduisons

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{k+1}\int_k^{k+1} dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k}\int_k^{k+1} dx.$$

Nous en concluons

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k}.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Nous additionnons membres à membres cette double inégalité lorsque l'entier k varie de 1 à $n-1$, avec $n \geqslant 2$.
Il vient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Nous observons

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = h_n - 1,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^n = \ln n - \ln 1 = \ln n,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = h_n - \frac{1}{n}.$$

Il en résulte

$$h_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant h_n - \frac{1}{n},$$

ce qui implique, d'une part que

$$\ln n + \frac{1}{n} \leqslant h_n,$$

et d'autre part,

$$h_n \leqslant \ln n + 1.$$

Ainsi, pour $n \geqslant 2$, nous obtenons

$$\ln n + \frac{1}{n} \leqslant h_n \leqslant \ln n + 1.$$

Puisque cet encadrement demeure vrai lorsque $n = 1$, nous en concluons

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} + \ln n \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln n.}$$

3. De l'encadrement obtenu ci-dessus, il résulte

$$h_n \geqslant \ln n + \frac{1}{n}, \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \left(\ln n + \frac{1}{n}\right) = +\infty,$$

ce qui prouve par comparaison

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} h_n = +\infty.}$$

$\boxed{\text{La suite } (h_n) \text{ diverge donc vers } +\infty.}$

4. Soit un entier $n \geqslant 1$. L'encadrement $\ln n + \frac{1}{n} \leqslant h_n \leqslant \ln n + 1$ implique

$$0 < \frac{1}{n} \leqslant h_n - \ln n \leqslant 1,$$

ce qui prouve

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1.}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= h_{n+1} - \ln(n+1) - h_n + \ln n \\ &= h_{n+1} - h_n - (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n). \end{aligned}$$

Lors de la question **1.**, nous avons montré

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}.$$

Nous en déduisons

$$\frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) \leqslant 0,$$

ce qui justifie

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0, \text{ soit } u_{n+1} \leqslant u_n.$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}}$

6. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

$\boxed{\text{Par conséquent, cette suite converge vers un réel } \gamma \in [0{,}1] \text{ qui est la } \textbf{constante d'Euler}.}$

> *Remarque. Une valeur approchée de la constante d'Euler est*
>
> $$\gamma \approx 0{,}577 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Suites et intégration par parties

Exercice 23 (★★★☆) Suite récurrente, intégration et fonction ln

Nous considérons la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$I_n = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2}\, dx.$$

1. Calculer I_1.

2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$I_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1) I_n.$$

3. Proposer un programme Python qui restitue une approximation de I_n pour chaque valeur de n choisie par l'utilisateur.

1. Nous calculons $I_1 = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ en intégrant par parties.

Pour tout réel $x \in [1,e^2]$, nous posons

$$u'(x) = \frac{1}{x^2} \text{ et } v(x) = \ln x,$$

$$u(x) = -\frac{1}{x} \text{ et } v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1,e^2]$. La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} -\frac{1}{x^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{e^2}\ln e^2 - \left[\frac{1}{x}\right]_1^{e^2} \\ &= -\frac{2}{e^2} - \left(\frac{1}{e^2} - 1\right) \\ &= 1 - \frac{3}{e^2}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } I_1 = 1 - \frac{3}{e^2}.}$

2. Puisque

$$I_{n+1} = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}\,dx,$$

nous établissons cette formule de récurrence en intégrant à nouveau par parties.
Pour tout réel $x \in [1,e^2]$, nous posons

$$u'(x) = \frac{1}{x^2} \text{ et } v(x) = (\ln x)^{n+1},$$

$$u(x) = -\frac{1}{x} \text{ et } v'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n.$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1,e^2]$. La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[-\frac{1}{x}(\ln x)^{n+1}\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} -\frac{1}{x}(n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n\,dx \\ &= -\frac{1}{e^2}\left(\ln e^2\right)^{n+1} + (n+1)\int_1^{e^2} \frac{1}{x^2}(\ln x)^n\,dx, \end{aligned}$$

ce qui établit, en conclusion,

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)I_n.}$$

3. Nous proposons la fonction Python `intln(n)` qui suit.

```python
from math import *
def intln(n):
    u = 1 - 3/(exp(1))**2
    for k in range(1, n):
        u = (k+1)*u - 2**(k+1)/(exp(1))**2
    return u
```

Nous obtenons par exemple

```
>>> intln(2)
0.646647167633873
>>> intln(5)
1.9876330176737236
>>> intln(10)
30.148884588074736
>>> intln(20)
14672.095690821123
```

Exercice 24 (★★★★) Une formule de Taylor

Pour tout réel $x > -1$ et pour tout entier naturel n, nous posons

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\, dt.$$

1. Calculer $I_0(x)$.

2. Prouver que, quel que soit l'entier naturel n,

$$I_{n+1}(x) = -I_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

En déduire $I_1(x)$.

3. Montrer que, pour tout réel $x > -1$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\, dt.$$

4. Pour tout entier naturel non nul, nous posons

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Montrer, en prenant toutes les initiatives, que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \ln 2.$$

5. Proposer un algorithme qui restitue un entier N tel que s_N soit une valeur approchée de $\ln 2$ à ε près.

1. Nous avons

$$I_0(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = [\ln|1+t|]_0^x = \ln|1+x|.$$

Puisque $1 + x > 0$, nous en concluons

$$\boxed{I_0(x) = \ln(1+x).}$$

2. ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous établissons cette formule de récurrence en intégrant par parties

$$I_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1+t)^{n+2}}\, dt.$$

Ainsi, pour $t \in [0,x]$ ou $t \in [x,0]$, nous posons

$$u(t) = (x-t)^{n+1} \text{ et } v'(t) = (1+t)^{-(n+2)},$$

$$u'(t) = -(n+1)(x-t)^n \text{ et } v(t) = \frac{(1+t)^{-(n+2)+1}}{-(n+2)+1} = -\frac{1}{(n+1)(1+t)^{n+1}}.$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles considérés, ce qui donne

$$I_{n+1}(x) = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)(1+t)^{n+1}}\right]_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt.$$

Nous en concluons que, pour tout entier naturel n,

$$\boxed{I_{n+1}(x) = -I_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}.}$$

▷ *Calcul de $I_1(x)$.*
En particulier, pour $n = 0$ dans l'égalité précédente, nous obtenons

$$\boxed{I_1(x) = -I_0(x) + x = x - \ln(1+x).}$$

3. Nous montrons cette égalité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit un réel $x > -1$.

Initialisation.
Nous avons

$$\ln(1+x) = x - I_1(x) = x + (-1)^1 \int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2}\,dt,$$

ce qui justifie que l'égalité proposée est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité.
Nous supposons qu'à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, l'égalité proposée est vraie, c'est-à-dire

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n I_n(x).$$

Montrons

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1} I_{n+1}(x).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence et en remarquant que $(-1)^n \times (-1) = (-1)^{n+1}$, il vient

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - I_{n+1}(x)\right)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1} I_{n+1}(x).\end{aligned}$$

Ainsi la propriété attendue est héréditaire.
En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons que pour tout réel $x > -1$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt.}$$

4. ▷ En particulier, pour $x = 1$, nous obtenons

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + (-1)^n I_n(1),$$

c'est-à-dire

$$\ln 2 - s_n = (-1)^n I_n(1).$$

Puisque

$$I_n(1) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt \geqslant 0,$$

nous en déduisons

$$|\ln 2 - s_n| = |(-1)^n I_n(1)| = I_n(1).$$

▷ Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous déterminons un encadrement de $I_n(1)$.
Pour tout réel $t \in [0,1]$, $1 \leqslant 1+t \leqslant 2$, ce qui implique

$$0 < 1 \leqslant (1+t)^{n+1} \leqslant 2^{n+1}.$$

Puisque la fonction inverse est décroissante strictement sur $]0,+\infty[$, nous obtenons

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(1+t)^{n+1}} \leqslant 1.$$

Comme $(1-t)^n \geqslant 0$, nous en déduisons l'encadrement

$$\frac{(1-t)^n}{2^{n+1}} \leqslant \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \leqslant (1-t)^n.$$

Par comparaison des intégrales, avec $0 < 1$, nous établissons que

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{2^{n+1}}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt \leqslant \int_0^1 (1-t)^n\,dt,$$

soit

$$\frac{1}{2^{n+1}} \int_0^1 (1-t)^n\,dt \leqslant I_n(1) \leqslant \int_0^1 (1-t)^n\,dt.$$

Or, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\int_0^1 (1-t)^n\,dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

ce qui permet de conclure par l'encadrement

$$\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \leqslant I_n(1) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

▷ Nous déterminons la limite de la suite (s_n) quand n tend vers $+\infty$.
Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

par encadrement, nous en déduisons que la suite $(I_n(1))$ converge vers 0.

Il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} |\ln 2 - s_n| = 0,$$

ce qui démontre que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = \ln 2.}$$

5. La précision ε étant choisie, nous proposons la fonction Python `ln2(eps)` suivante.

```python
from math import *
def ln2(eps):
    n = 1
    s = 0
    while abs(s - log(2)) >= eps:
        s = s + (-1)**(n-1)/n
        n = n+1
    return n, s
```

Par exemple, nous obtenons

```
>>> ln2(0.1)
(6, 0.7833333333333332)
>>> ln2(0.05)
(11, 0.6456349206349207)
```

Exercice 25 (★★★★) Intégrales de Wallis

Nous considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt.$$

1. a) Calculer u_0 et u_1.
   b) Pour tout entier naturel n, quel est le signe de u_n ?
   c) Justifier que la suite (u_n) est décroissante.
   d) Cette suite converge-t-elle ?
2. Montrer que, quel que soit l'entier naturel n,
$$u_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin^2(t)\,dt.$$
En déduire
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}u_n.$$
3. Prouver que, pour tout entier n,
$$0 \leqslant \frac{n+1}{n+2}u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n,$$
puis que $u_n > 0$.
4. Établir que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$
5. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = (n+1)u_nu_{n+1}$.
Montrer que, quel que soit l'entier naturel n,
$$v_n = \frac{\pi}{2}.$$
Prouver que
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \text{ c'est-à-dire } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = 1.$$

1. a) *Calculs de u_0 et u_1.*
Nous avons
$$u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2},$$
$$u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$
$$\boxed{\text{Ainsi, } u_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } u_1 = 1.}$$
   b) Pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^n(t) \geqslant 0$, ce qui implique, par positivité de l'intégrale, avec $0 < \frac{\pi}{2}$,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt \geqslant 0.$$
Ainsi,
$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0.}$$

c) Pour tout entier naturel n, par linéarité, il vient

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^{n+1}(t) - \cos^n(t)\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)(\cos t - 1)\,dt. \end{aligned}$$

Puisque, pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^n(t) \geqslant 0$ et $\cos t - 1 \leqslant 0$, nous en déduisons

$$\cos^n(t)(\cos t - 1) \leqslant 0,$$

ce qui entraîne, par positivité, sachant que $0 < \dfrac{\pi}{2}$,

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0.$$

$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

d) Cette suite est décroissante et minorée par 0. Nous pouvons affirmer qu'elle est convergente.

2. Soit n un entier naturel.

▷ En observant que

$$u_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\cos t\,dt,$$

nous intégrons par parties, en posant, pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$u(t) = \cos^{n+1}(t) \text{ et } v'(t) = \cos t,$$

$$u'(t) = (n+1)(-\sin t)\cos^n(t) \text{ et } v(t) = \sin t.$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui donne

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \left[\cos^{n+1}(t)\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(-\sin t)\cos^n(t)\sin t\,dt \\ &= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin^2(t)\,dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin^2(t)\,dt. \end{aligned}$$

▷ De cette égalité, nous déduisons

$$u_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\left(1 - \cos^2(t)\right) dt,$$

ce qui donne par linéarité,

$$u_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)\,dt,$$

c'est-à-dire

$$u_{n+2} = (n+1)u_n - (n+1)u_{n+2}.$$

Il en résulte

$$u_{n+2} + (n+1)u_{n+2} = (n+1)u_n,$$

ce qui implique

$$(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n.$$

Puisque $n+2 > 0$, nous en concluons

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}u_n.}$$

3. ▷ Pour tout entier n, puisque la suite (u_n) est décroissante, nous avons

$$u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Puisque

$$u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n \text{ et } u_n \geqslant 0,$$

nous en concluons

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{n+1}{n+2} u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.}$$

▷ Nous prouvons que, pour tout entier n, $u_n > 0$.
Nous supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n = 0$.
Pour cet entier n, nous avons donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt = 0.$$

Puisque la fonction $t \longmapsto \cos^n(t)$ est continue et positive sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, en appliquant la propriété établie dans l'exercice 15, nous en déduisons

$$\forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \cos^n(t) = 0,$$

ce qui est absurde.
$\boxed{\text{Nous en concluons } \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.}$

4. En divisant par $u_n > 0$ chaque membre de la triple inégalité obtenue ci-dessus, il vient

$$0 \leqslant \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1,$$

ce qui implique

$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1.$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$, par encadrement, nous en concluons

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.}$$

5. ▷ Nous montrons par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{\pi}{2}.$$

Initialisation.
En utilisant la première question, nous obtenons

$$v_0 = (0+1) u_0 u_1 = \frac{\pi}{2},$$

ce qui justifie l'égalité proposée au rang $n = 0$.

Hérédité.
Nous supposons que pour un entier naturel n fixé, $v_n = \dfrac{\pi}{2}$.
Nous avons

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (n+2) u_{n+1} u_{n+2} \\ &= (n+2) u_{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} u_n \\ &= (n+1) u_{n+1} u_n \\ &= v_n. \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence implique

$$v_{n+1} = \frac{\pi}{2},$$

ce qui prouve l'hérédité de la propriété proposée.
En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{\pi}{2}.}$$

▷ Soit n un entier naturel.
De l'égalité

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)u_n u_{n+1},$$

il résulte, puisque $u_{n+1} > 0$,

$$\frac{\pi}{2(n+1)u_{n+1}} = u_n,$$

ce qui implique

$$\frac{\pi}{2(n+1)}\frac{u_n}{u_{n+1}} = (u_n)^2.$$

Nous en déduisons

$$\frac{(u_n)^2}{\frac{\pi}{2n}} = (u_n)^2 \times \frac{2n}{\pi} = \frac{\pi}{2(n+1)}\frac{u_n}{u_{n+1}} \times \frac{2n}{\pi} = \frac{n}{n+1} \times \frac{u_n}{u_{n+1}}.$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(u_n)^2}{\frac{\pi}{2n}} = 1.$$

Par composition avec la fonction racine carrée, nous en déduisons

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{(u_n)^2}{\frac{\pi}{2n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = 1.}$$

Calculs approchés d'une intégrale

Exercice 26 (★★★☆) Méthode des trapèzes

Nous reprenons les données et les conclusions de la méthode des rectangles.

Soit $[a,b]$ un intervalle avec $a < b$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous considérons une subdivision de $[a,b]$, de pas $h = \dfrac{b-a}{n}$, qui est une suite finie de réels (x_k) définie par

$$\forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad x_k = a + k\frac{b-a}{n} = a + kh.$$

Étant donnée une fonction f continue, monotone et positive sur $[a,b]$, avec $a < b$.

En posant $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, nous savons que les suites (S_n) et (S'_n), définies sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{et} \quad S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}),$$

satisfont à

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S'_n = I.$$

1. Nous supposons que f est croissante sur $[a,b]$. Pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, nous considérons le trapèze de bases $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$, de hauteur $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Justifier que la somme T_n des aires de ces trapèzes lorsque l'entier k varie de 0 à $n-1$ est

$$T_n = \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_k)+f(x_{k+1})) = \frac{S_n+S'_n}{2}.$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = I$.

2. Vérifier que, pour tout entier n non nul,

$$T_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right).$$

3. Proposer un algorithme qui restitue une valeur approchée de l'intégrale I.

4. En déduire une valeur approchée de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$ et comparer le résultat avec ceux qui ont été obtenus par la méthode des rectangles.

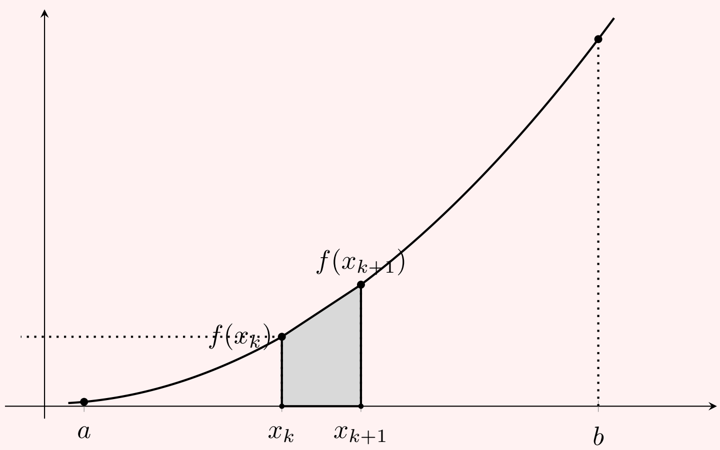
5. Montrer que, pour tout entier n non nul,

$$|T_n - I| \leqslant \frac{b-a}{2n}(f(b)-f(a)).$$

6. En déduire un algorithme qui restitue un seuil N à partir duquel T_N est une valeur approchée de I à 10^{-P} près.

Implémenter cet algorithme avec $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

1. Nous disposons de la figure :



L'aire du trapèze considérée est égale à

$$\frac{(f(x_k)+f(x_{k+1}))h}{2} = \frac{b-a}{2n}(f(x_k)+f(x_{k+1})).$$

▷ Par conséquent la somme T_n des aires de ces trapèzes, lorsque l'entier k varie de 0 à

$n-1$, est

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{2n}(f(x_k)+f(x_{k+1})) \\ &= \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_k)+f(x_{k+1})) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\right) \\ &= \frac{S_n+S'_n}{2}. \end{aligned}$$

▷ Nous savons

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S'_n = I.$$

Il en résulte, puisque $T_n = \dfrac{S_n+S'_n}{2}$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n = I.}$$

2. Soit n un entier naturel non nul. Nous avons

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{b-a}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\right) \\ &= \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \sum_{k=0}^{n-2} f(x_{k+1}) + f(x_n)\right) \\ &= \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right) \\ &= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'égalité est établie.}}$

3. Les bornes a et b ainsi que l'entier $n \geqslant 1$ étant choisis, la fonction f à intégrer étant définie, nous proposons l'algorithme suivant.

```
from math import *
def f(x):
    return log(x+1)

a = float(input("a="))
b = float(input("b="))
n = int(input("n="))
h = (b-a)/n
m = (f(a)+f(b))/2
s = 0
for k in range(1, n-1):
    s = s + h*f(a+k*h)
t = h*m + s
print("Pour n=", n)
print("t=", t)
```

4. Ainsi une approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$ est

```
>>> Pour n = 100
t = 0.3794088480901648
```

Par la méthode des rectangles, un encadrement de I pour $n = 100$ est

$$u = 0{,}382824458574729, \quad v = 0{,}38975593038032846.$$

$\boxed{\text{La méthode des trapèzes donne une valeur plus proche du milieu de cet encadrement.}}$

5. Soit n un entier naturel non nul. Nous savons que

$$S_n \leqslant I \leqslant S'_n.$$

Il en résulte

$$S_n - \frac{S_n + S'_n}{2} \leqslant I - \frac{S_n + S'_n}{2} \leqslant S'_n - \frac{S_n + S'_n}{2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{S_n - S'_n}{2} \leqslant I - T_n \leqslant \frac{S'_n - S_n}{2},$$

ce qui implique

$$|T_n - I| \leqslant \frac{S'_n - S_n}{2}.$$

Or, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{S'_n - S_n}{2} &= \frac{b-a}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right)\\
&= \frac{b-a}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-2} f(x_{k+1}) + f(b) - \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) - f(a)\right)\\
&= \frac{b-a}{2n}(f(b) - f(a)).
\end{aligned}$$

Nous en concluons

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad |T_n - I| \leqslant \frac{b-a}{2n}(f(b) - f(a)).}$$

6. En utilisant ce majorant de l'erreur commise dans l'approximation de $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$ par T_n, nous proposons le programme Python suivant.

```python
from math import *
def f(x):
    return log(x+1)

def trapseuil(a, b, p):
    n = 1
    while (b-a)*(f(b)-f(a))/(2*n) >= 10**(-p):
        n = n+1
    return n
```

ce qui donne, par exemple, à 10^{-3} près,

```
>>> trapseuil(0, 1, 3)
347
```

Nous remarquons que le majorant nécessite 347 itérations pour obtenir une approximation de I à 10^{-3}.

> *Avec un peu plus de mathématiques nous pourrions obtenir une meilleure majoration de l'erreur en fonction de* $\dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 27 (★★★☆) Majoration de l'erreur dans la méthode des rectangles

> *Nous rappelons l'inégalité des accroissements finis. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a,b]$. S'il existe une constante $k \in \mathbb{R}_+^*$ telle que,*
>
> $$\forall\, x \in [a,b], \quad |f'(x)| \leqslant k,$$
>
> *alors, pour tous les réels u et v appartenant à l'intervalle $[a,b]$,*
>
> $$|f(u) - f(v)| \leqslant k|u - v|.$$

Nous supposons que f est une fonction dérivable sur un intervalle $[a,b]$ qui satisfait à l'inégalité des accroissements finis. Les données sont celles de l'exercice précédent, avec $a < b$.

1. Justifier que, pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$,

$$(x_{k+1} - x_k)f(x_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(t))\,dt.$$

2. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|S_n - I| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x_k) - f(t)|\,dt.$$

3. En déduire

$$|S_n - I| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} k(t - x_k)\,dt.$$

4. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad |S_n - I| \leqslant \frac{k(b-a)^2}{2n}.$$

1. Soit un entier $k \in [\![0,n]\!]$. Nous avons, par linéarité,

$$\begin{aligned}(x_{k+1} - x_k)f(x_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,dt - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(t))\,dt.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'égalité est établie.}}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}, \quad I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}|S_n - I| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)f(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left((x_{k+1} - x_k)f(x_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(t))\,dt \right|.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, il vient

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(t))\,dt \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(t))\,dt \right|.$$

Le corollaire du cours induit

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(t))\,dt\right| \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x_k) - f(t)|\,dt,$$

ce qui justifie

$$\boxed{|S_n - I| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x_k) - f(t)|\,dt.}$$

3. L'inégalité des accroissements finis appliquée aux points x_k et t qui appartiennent à $[x_k, x_{k+1}] \subset [a,b]$ donne

$$|f(x_k) - f(t)| \leqslant k|x_k - t|.$$

Puisque $t \geqslant x_k$, nous en déduisons

$$|f(x_k) - f(t)| \leqslant k(t - x_k).$$

Nous en concluons que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x_k) - f(t)|\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} k(t - x_k)\,dt,$$

ce qui implique, par transitivité de $\leqslant$,

$$\boxed{|S_n - I| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} k(t - x_k)\,dt.}$$

4. Pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$, nous avons

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} k(t - x_k)\,dt = k\left[\frac{(t - x_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = k\frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \frac{k(b-a)^2}{2n^2}.$$

Il en résulte

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} k(t - x_k)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(b-a)^2}{2n^2} = n \times \frac{k(b-a)^2}{2n^2} = \frac{k(b-a)^2}{2n}.$$

Nous en concluons

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad |S_n - I| \leqslant \frac{k(b-a)^2}{2n}.}$$