T$^{\text{ale}}$ spé Maths expertes
J. Bérard

Lycée Saint-Augustin

2025–2026

TD 2 **Divers modes de raisonnement**

Exercice 1 (★☆☆☆) Soit x et y deux réels. Montrer que :

1. $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

2. $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$.

Exercice 2 (★★☆☆) Démontrer la propriété « $\forall n \in \mathbb{N}$, n et n^2 ont même parité », en utilisant différents types de preuves :

1. élémentaire directe (déduction ou équivalence) ;

2. par disjonction de cas ;

3. par contraposée ;

4. par l'absurde.

Exercice 3 (★★☆☆) Déterminer l'ensemble (noté D) des réels t tels que les nombres $\dfrac{t^2+2}{t^2-2}$ et $\dfrac{t-1}{t+1}$ sont bien définis, puis résoudre l'équation (d'inconnue $t \in D$) :

$$\frac{t^2+2}{t^2-2} = \frac{t-1}{t+1}.$$

Exercice 4 (★★☆☆) Résoudre l'équation (d'inconnue $s > -1$) :

$$s + \sqrt{s+1} = 5.$$

Exercice 5 (★★☆☆) Soit n_1, n_2, n_3 des entiers naturels vérifiant $n_1 + n_2 + n_3 = 30$. Montrer qu'au moins un de ces entiers est supérieur à 10.

Exercice 6 (★★★☆)

1. Montrer que le produit de deux entiers impairs est impair.

2. Montrer que réciproquement, si le produit de deux entiers est impair, alors ces deux entiers sont impairs.

Exercice 7 (★★★☆) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifient :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Exercice 8 (★★★★) L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x \quad \text{(E1)}$$

1. Dans cette question, on suppose que f est une fonction solution, c'est-à-dire une fonction qui vérifie (E1).

  a) Déterminer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

  b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(1-x) + (1-x)f(x) = 2 - x$. On note cette égalité (E2).

  c) À l'aide de (E1) et (E2), déterminer une expression de $f(x)$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Donner la conclusion de l'exercice.
