T$^{\text{ale}}$ spé Maths expertes
J. Bérard

2025–2026

Lycée Saint-Augustin

TD 3 **Applications**

Correspondances, fonctions, applications

Exercice 1 (★★☆☆)

1. Si $\Gamma = \{(t^2,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, le triplet $(\mathbb{R}_+,\mathbb{R},\Gamma)$ est-il une application ?

2. Si $\Gamma = \{(t^2,t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$, le triplet $(\mathbb{R},\mathbb{R}_+,\Gamma)$ est-il une application ?

Injections, surjections, bijections

Exercice 2 (★★☆☆) Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

1. $f_1 \left| \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x + \frac{1}{x} \end{array} \right.$

2. $f_2 \left| \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x + \frac{1}{x} \end{array} \right.$

3. $f_3 \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,-2x+2y) \end{array} \right.$

4. $f_4 \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,xy) \end{array} \right.$

5. $f_5 \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x - y^2 \end{array} \right.$

6. $f_6 \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$

Exercice 3 (★★☆☆) *obligatoire* Soit $f \in F^E$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes *(penser à un raisonnement circulaire)* :

(i) L'application f est injective.

(ii) Tout élément de F possède au plus un antécédent par f.

(iii) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au plus une solution.

(iv) $\forall\,(x_1,x_2) \in E^2, \quad (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$.

Exercice 4 (★★☆☆) *obligatoire* Soit $f \in F^E$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) L'application f est surjective.

(ii) Tout élément de F a au moins un antécédent par f.

(iii) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution.

(iv) $\forall\, y \in F, \exists\, x \in E, \quad y = f(x)$.

Exercice 5 (★★☆☆) *obligatoire* Soit $f \in F^E$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) L'application f est bijective.

(ii) Tout élément de F a un et un seul antécédent par f.

(iii) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution.

(iv) $\forall\, u \in F, \exists!\, x \in E, \quad y = f(x)$.

Exercice 6 (★★★★) Soit E et F deux ensembles. Montrer qu'il existe une application injective de E dans F si et seulement s'il existe une application surjective de F dans E.

Application réciproque

Exercice 7 (★☆☆☆) Pour chacune des applications f suivantes, donner l'ensemble d'arrivée J tel que f soit bijective. Expliciter ensuite sa réciproque.

1. $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & 1+e^x \end{array} \right.$

2. $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & -\dfrac{x}{2}-1 \end{array} \right.$

3. $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right.$

4. $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & x(1+x) \end{array} \right.$

Exercice 8 (★★★☆) Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On considère l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X\cap A, X\cap B) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A\cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A\cap B = \varnothing$.
3. Dans le cas où f est bijective, déterminer son application réciproque.

Composition des applications

Exercice 9 (★☆☆☆) Soit $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow E$. À quelle condition sur E et F a-t-on $u\circ v = v\circ u$?

Exercice 10 (★☆☆☆) Soit $E = F = \mathbb{N}$. Soient f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telles que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad f(n)=2n \qquad \text{et} \qquad \forall\, n\in\mathbb{N},\quad g(2n)=n \text{ et } g(2n+1)=0.$$

1. f et g sont-elles injectives ? surjectives ?
2. Calculer $g\circ f$ puis $f\circ g$.
3. Conclure.

Fonction indicatrice (ou caractéristique)

Exercice 11 (★★☆☆) Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E.
1. Rappeler les fonctions caractéristiques de $\overline{A}$, $A\cap B$, $A\cup B$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Retrouver, à l'aide des fonctions indicatrices, que $A\cap B = A\cup B \iff A = B$.

Exercice 12 (★★☆☆) Soit A_1, A_2 et A_3 trois parties de E. On pose $A = A_1\cup A_2\cup A_3$.
1. Montrer que $1-\mathbb{1}_A = (1-\mathbb{1}_{A_1})(1-\mathbb{1}_{A_2})(1-\mathbb{1}_{A_3})$.
2. En déduire :
$\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} A_1 + \operatorname{Card} A_2 + \operatorname{Card} A_3 - \operatorname{Card} A_2\cap A_3 - \operatorname{Card} A_1\cap A_3 - \operatorname{Card} A_1\cap A_2$
$+ \operatorname{Card} A_1\cap A_2\cap A_3$.

Images directes et réciproques d'ensembles

Exercice 13 (★☆☆☆) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) := \cos x$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Déterminer les ensembles suivants :

1. $f(\mathbb{R})$

2. $f\big([0,\pi]\big)$

3. $f\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$

4. $f^{-1}(\{0\})$

5. $f^{-1}\left(\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right)$

6. $f^{-1}\big([0,1]\big)$

7. $f^{-1}\big(f(\{0\})\big)$

8. $f\big(f^{-1}(\{0\})\big)$

9. $f^{-1}\left(f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)\right)$

10. $f\big(f^{-1}([0,1])\big)$.

Exercice 14 (★★☆☆) $\boxed{\textit{obligatoire}}$ Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soient A et B deux parties de E, C et D deux parties de F.

Montrer que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

5. $f\big(f^{-1}(C)\big) \subset C$.

6. $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$.

Exercice 15 (★★☆☆) Soit E et F deux ensembles, et f une application de E vers F.

1. Montrer qu'on a $\forall A \subseteq E, \quad A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$.

2. Montrer que f est injective si et seulement si pour tout $A \subseteq E, \quad A = f^{-1}\big(f(A)\big)$.

3. Montrer qu'on a $\forall B \subseteq F, \quad f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour tout $B \subseteq F, \quad B = f(f^{-1}(B))$.

Exercice 16 (★★★☆) Soit E et F deux ensembles, et f une application de E vers F. On considère les applications :

$$\phi \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \right.$$

et

$$\psi \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array} \right.$$

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

  a) f est injective

  b) ϕ est injective

  c) ψ est surjective

2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

  a) f est surjective

  b) ϕ est surjective

  c) ψ est injective

Familles indexées

Exercice 17 (★★★★) Pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $J_h =]-h,h[$. Montrer que :

$$\bigcap_{h\in\mathbb{R}_+^*} J_h = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{k\in\mathbb{R}_+^*} J_h = \mathbb{R}.$$
