Correction du TD 3 **Applications**

Exercice 6 (★★★★) Soit E et F deux ensembles. Montrer qu'il existe une application injective de E dans F si et seulement s'il existe une application surjective de F dans E.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons qu'il existe une injection f de E vers F. Chaque élément de $f(E)$ a donc exactement un antécédent par f. Soit $x_0 \in E$. Soit $g : F \longrightarrow E$ l'application définie ainsi : si $y \in f(E)$, alors $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f ; si $y \notin f(E)$, $g(y) = x_0$. L'application g est bien définie. Montrons qu'elle est surjective. Soit $x \in E$. Soit y son image par f. Par définition, $y \in f(E)$, donc $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f, donc $g(y) = x$. Donc x a au moins un antécédent par g, donc g est surjective. Donc il existe une surjection de F vers E. (remarque : l'application g dépend du choix de x_0, mais peu importe : pour n'importe quel choix de x_0, elle est bien définie et surjective).

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons qu'il existe une surjection g de F vers E. Chaque élément de E a donc au moins un antécédent par g. Pour chaque élément x de E, choisissons un de ses antécédents par g (peu importe lequel), et appelons-le $f(x)$. Cela définit une application $f : E \to F$. Montrons que cette application est injective. Soit $x \in E$. Par définition, $f(x)$ est un antécédent de x par g, donc $g(f(x)) = x$, donc $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, donc $g \circ f$ est bijective, donc injective. Donc f est injective. Donc il existe une injection de E dans F.

Exercice 8 (★★★★) Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On considère l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f injective. Alors :

$$\forall\, (X_1,X_2) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad f(X_1) = f(X_2) \implies X_1 = X_2.$$

D'une part, $f(A \cup B) = \big((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B\big) = (A,B)$.
D'autre part, $f(E) = (E \cap A, E \cap B) = (A,B)$.
Ainsi, $f(A \cup B) = f(E)$, donc $A \cup B = E$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $A \cup B = E$. Soit $(X_1,X_2) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $f(X_1) = f(X_2)$. On a donc $X_1 \cap A = X_2 \cap A$ et $X_1 \cap B = X_2 \cap B$, d'où :

$$(X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B).$$

Or, comme $A \cup B = E$, $(X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = X_1$ et $(X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B) = X_2$.
Ainsi, $X_1 = X_2$. On a donc f injective.

En conclusion, $\boxed{f \text{ injective} \iff A \cup B = E.}$

2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f surjective. Alors :

$$\forall\, (Y_1,Y_2) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), \exists\, X \in \mathcal{P}(E), \quad (Y_1,Y_2) = f(X).$$

En particulier, on peut trouver $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $(\varnothing, A \cap B) = f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. Ainsi, $X \cap A = \varnothing$ et $X \cap B = A \cap B$. On a donc :

$$\varnothing = \varnothing \cap B = (X \cap A) \cap B = (X \cap B) \cap A = (A \cap B) \cap A = A \cap B$$

D'où $A \cap B = \varnothing$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $A \cap B = \varnothing$. Soit $(Y_1,Y_2) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. On a donc $Y_1 \cap B = Y_2 \cap A = \varnothing$. Posons $X = Y_1 \cup Y_2$. Alors :

$$\begin{aligned} f(X) &= \big((Y_1 \cup Y_2) \cap A,(Y_1 \cup Y_2) \cap B) \\ &= \big((Y_1 \cap A) \cup (Y_2 \cap A),(Y_A \cap B) \cup (Y_2 \cap B)) \\ &= (Y_1,Y_2). \end{aligned}$$

Ainsi, f est surjective.

En conclusion, $\boxed{f \text{ surjective } \iff A \cap B = \varnothing.}$

3. Dans le cas où f est bijective, déterminer son application réciproque.

Supposons $A \cup B = E$ et $A \cap B = \varnothing$.

Soit $g \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (X_1,X_2) & \longmapsto & X_1 \cup X_2 \end{array} \right.$

Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, on a :

$$\begin{aligned} g \circ f(X) &= g(X \cap A,X \cap B) \\ &= (X \cap A) \cup (X \cap B) \\ &= X \quad \text{car } A \cup B = E. \end{aligned}$$

Ainsi, $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

Par ailleurs, pour tout $(X_1,X_2) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, on a :

$$\begin{aligned} f \circ g(X_1,X_2) &= f(X_1 \cup X_2) \\ &= \big((X_1 \cup X_2) \cap A,(X_1 \cup X_2) \cap B\big) \\ &= \big((X_1 \cap A) \cup (X_2 \cap A),(X_1 \cap B) \cup (X_2 \cap B)\big) \\ &= (X_1,X_2) \quad \text{car } X_1 \in A,\ X_2 \in A \text{ et } A \cap B = \varnothing. \end{aligned}$$

Ainsi, $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)}$.

Les applications f et g sont donc bijectives et réciproques l'une de l'autre, on a :

$$\boxed{f^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (X_1,X_2) & \longmapsto & X_1 \cup X_2 \end{array} \right.}$$
