T$^{\text{ale}}$ spé Maths expertes
J. Bérard

Lycée Saint-Augustin

2025–2026

Correction du TD 4 **Relations**

Exercice 1 (★★☆☆) Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F. On définit la relation $\mathscr{R}$ sur E en posant :

$$x\mathscr{R}y \iff f(x) = f(y).$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E. Décrire les classes d'équivalence de cette relation.

On définit, pour une application $f : E \to F$, la relation $\mathscr{R}$ sur E par

$$x\mathscr{R}y \iff f(x) = f(y).$$

Réflexive : $f(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$.
Symétrique : $f(x) = f(y) \implies f(y) = f(x)$.
Transitive : $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z) \implies f(x) = f(z)$.

Ainsi $\mathscr{R}$ est une **relation d'équivalence**. La classe d'équivalence de $x \in E$ est

$$\tilde{x} = \{y \in E \mid f(y) = f(x)\} = f^{-1}(\{f(x)\}),$$

c'est-à-dire la *fibre* (c'est comme cela qu'on appelle l'ensemble des antécédents) de f au-dessus de $f(x)$; les classes forment une partition de E.

Exercice 2 (★★☆☆) On définit la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathscr{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y.$$

1. **Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.**

Sur $\mathbb{R}$, on pose $x\mathscr{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y$. Alors

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \iff (x-y)(x+y-1) = 0 \iff \big(x = y\big) \vee \big(x + y = 1\big).$$

Réflexive, symétrique : évident. **Transitive :** on distingue les cas :

- $x = y$ et $y = z \implies x = z$
- $x = y$ et $y + z = 1 \implies x + z = 1$
- $x + y = 1$ et $y = z \implies x + z = 1$
- $x + y = 1$ et $y + z = 1 \implies x = z$.

Donc $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

2. **Soit x un élément de $\mathbb{R}$. Déterminer la classe d'équivalence de x.**

Les classes sont

$$\tilde{x} = \begin{cases} \{x, 1-x\} & \text{si } x \neq \dfrac{1}{2}, \\ \left\{\dfrac{1}{2}\right\} & \text{si } x = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Exercice 3 (★★★☆) Sur $\mathbb{R}$, la relation $\mathscr{R}$ définie par

$$x\mathscr{R}y \iff x^3 - y^3 = 3(x-y)$$

est-elle une relation d'équivalence ? Dans l'affirmative, pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre d'éléments de la classe de x.

Sur $\mathbb{R}$, $x\mathscr{R}y \iff x^3 - y^3 = 3(x-y)$. On factorise

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) \implies (x-y)\big(x^2+xy+y^2-3\big) = 0,$$

d'où

$$x\mathscr{R}y \iff \big(x=y\big) \vee \big(x^2+xy+y^2=3\big).$$

Réflexive, symétrique : évident. Pour la **transitivité**, supposons $x \neq y$, $y \neq z$ et

$$x^2+xy+y^2=3, \qquad y^2+yz+z^2=3.$$

Alors x et z sont les deux racines du polynôme $t^2+yt+(y^2-3)=0$, donc

$$x+z=-y, \qquad xz=y^2-3.$$

Ainsi

$$x^2+xz+z^2=(x+z)^2-xz=y^2-(y^2-3)=3,$$

d'où $x\mathscr{R}z$. Les cas incluant des égalités se traitent comme dans l'exercice 2 : $\mathscr{R}$ est une **équivalence**.

Classes. Pour $x \in \mathbb{R}$, y appartient à $\tilde{x}$ si $y=x$ ou si y est solution de

$$y^2+xy+(x^2-3)=0 \qquad (\Delta = 12-3x^2).$$

- Si $|x|>2$, $\Delta<0$: pas d'autre solution réelle, donc $\tilde{x}=\{x\}$.
- Si $|x|=2$ ou $|x|=1$, $\Delta=0$ ou bien $y=x$ est déjà racine : $\tilde{x}$ a 2 éléments (par ex. $\tilde{2}=\{2,-1\}$, $\tilde{1}=\{1,-2\}$).
- Si $|x|<2$ et $x \neq \pm 1$, $\Delta>0$ donne deux solutions :

  $$y_1=\frac{-x+\sqrt{12-x^2}}{2} \quad \text{et} \quad y_2=\frac{-x-\sqrt{12-x^2}}{2}$$

  distinctes de x. On a $y_1+y_2=-x$, $\quad y_1y_2=x^2-3$ donc

  $$y_1^2+y_1y_2+y_2^2=3,$$

  donc $y_1\mathscr{R}y_2$ et la classe vaut

  $$\tilde{x}=\{x,y_1,y_2\}.$$

  (par ex. $\tilde{0}=\{0,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$).

Exercice 4 (★★★★) Soit $\mathcal{U}$ une partition de E. Montrer que la relation $\mathscr{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x\mathscr{R}y \iff \big(\exists\, A \in \mathcal{U},\, (x \in A) \wedge (y \in A)\big)$$

est une relation d'équivalence dont les classes sont les éléments de $\mathcal{U}$.

Soit $\mathcal{U}$ une *partition* de E. On définit $x\mathscr{R}y \iff \exists\, A \in \mathcal{U},\, (x \in A) \wedge (y \in A)$.
Réflexive : chaque x appartient à un (unique) bloc $A \in \mathcal{U}$.
Symétrique : même bloc A.
Transitive : si $x,y \in A$ et $y,z \in B$ avec $A,B \in \mathcal{U}$, alors $y \in A \cap B$; or deux blocs d'une partition sont disjoints ou égaux : donc $A = B$ et $x,z \in A$.

Ainsi $\mathscr{R}$ est une **équivalence**.
Classes. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ est une partition de E donc il existe un bloc $A \in \mathcal{U}$ tel que $x \in A$.
De même, pour tout $y \in \tilde{x}$, il existe un bloc $B \in \mathcal{U}$ tel que $y \in B$, et par ailleurs, $x\mathscr{R}y$ donc $y \in A$.
Ainsi, $y \in A \cap B$. Or, $\mathcal{U}$ est une partition de E, donc $A \cap B \neq \varnothing \implies A = B$. Ainsi :

$$\forall\, y \in \tilde{x}, \quad y \in A.$$

Par ailleurs, pour tout $y \in A$, $x\mathscr{R}y$ car $(x \in A) \wedge (y \in A)$. Ainsi :

$$\forall\, y \in A, \quad y \in \tilde{x}.$$

On a donc $\tilde{x} = A$, ce qui signifie que chaque classe d'équivalence de $\mathscr{R}$ est un bloc de $\mathcal{U}$, et comme les classes d'équivalence forment une partition de E, on conclut :

$$E/\mathscr{R} = \mathcal{U}.$$

et ses classes sont exactement les blocs de la partition $\mathcal{U}$.
