T^ale spé Maths expertes
J. Bérard

2025–2026

Lycée Saint-Augustin

TD 5 **Structures algébriques**

Espaces vectoriels – Généralités

Exercice 1 (★☆☆☆) Les ensembles E suivants, munis de leurs opérations usuelles, sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y+z=0) \wedge (x-3y=0)\}$;
2. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+3y+z=0\}$;
3. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy \geqslant 0\}$;
4. $\{(x,\, x+y,\, x+y+z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$;
5. $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ monotone}\}$;
6. $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$.

Exercice 2 (★☆☆☆) On définit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, 2x+y-z=0\} \quad ; \quad F = \{(x,x,-x) \in \mathbb{R}^3,\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $E \cap F$.

Exercice 3 (★★☆☆) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Applications linéaires

Exercice 4 (★☆☆☆) Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y,\, y-z) \end{array} \right.$
2. $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+y,\, x-y,\, 2x+3y) \end{array} \right.$
3. $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0,\, u_1,\, u_2) \end{array} \right.$
4. $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP'-P \end{array} \right.$

Exercice 5 (★★★☆) On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel usuelle. Montrer que l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,\, y,\, z) & \longmapsto & (x+2y,\, 4x-y,\, -2x+2y+3z) \end{array} \right.$$

est un automorphisme *(i.e. linéaire et bijectif)* de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque.

Exercice 6 (★★★★) Soit Δ l'application de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad \Delta P(X) = P(X+1) - P(X).$$

1. Préciser le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P.
2. Montrer que Δ est linéaire et déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$.
3. Montrer que Δ induit un isomorphisme d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}[X]$ à déterminer sur $\mathbb{R}[X]$.
