T$^{\text{ale}}$ spé Maths expertes
J. Bérard

2025–2025

Lycée Saint-Augustin

TD 6 **Récurrence**

Exercice 1 (★☆☆☆)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

2. On prend un cube et on place en dessous de lui trois cubes ; on place ensuite cinq cubes en dessous de ces trois cubes, etc.
Combien utilise-t-on de cubes si l'on a dressé 100 rangées de cubes ?

Exercice 2 (★☆☆☆) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n = 3 - 2^{n+1}$.

Exercice 3 (★☆☆☆) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 9 \times 2^n + 5.$$

Exercice 4 (★☆☆☆) La suite (u_n) est définie par : $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4.

2. Que peut-on conjecturer sur l'expression de u_n en fonction de n ?

3. Démontrer cette conjecture par récurrence et donner la valeur exacte de u_{2024}.

Exercice 5 (★★☆☆) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1.$$

Exercice 6 (★★☆☆) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$n! \geqslant 2^{n-1}.$$

Exercice 7 (★★☆☆) Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.

1. Déterminer u_1, u_2, u_3 puis déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n.

2. Démontrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Exercice 8 (★★☆☆) Somme des cubes

On pose, pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

1. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.

2. Démontrer par récurrence que :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 9 (★★☆☆) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n + 6} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 3 \leqslant v_n \leqslant 10.$$

Exercice 10 (★★☆☆) La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in \,]0\,;1[\\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x(2-x)$ est croissante sur $[0;1]$.

2. Démontrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1.$$

3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 11 (★★★☆) Soit un réel $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2\cos a \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de a et de n.

2. Démontrer par récurrence cette conjecture.

Exercice 12 (★★★☆) Inégalités de Bernoulli

Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer par récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1 + na \quad \textit{(Inégalité de Bernoulli d'ordre 1).}$$

2. Prouver l'inégalité

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad (1+a)^n \geqslant 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 \quad \textit{(Inégalité de Bernoulli d'ordre 2).}$$

3. *Application* : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{3n}{3^n}.$$

Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la double inégalité suivante :

$$0 < u_n < \frac{3n}{2n^2+1}.$$

Exercice 13 (★★★☆) Nombres de Fermat

Un nombre Pierre de Fermat [1], noté F_n, est défini par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F_n = 2^{2^n} + 1.$$

1. Justifier que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1.$$

2. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k.$$

---

1. Mathématicien français du XVII$^{\text{e}}$ siècle.