T^ale^ spé Maths expertes
J. Bérard

Lycée Saint-Augustin

2025–2026

TD 7 **Combinatoire – Dénombrement**

Exercice 1 (★☆☆☆) On considère l'ensemble C des chiffres de 0 à 9 et l'ensemble L composé des deux lettres m et s.

1. Déterminer tous les sous-ensembles de C comportant 2 éléments.
2. Déterminer l'ensemble $C \times L$.

Exercice 2 (★☆☆☆) Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. Combien y a-t-il de façon de répondre à ce QCM ?

Exercice 3 (★☆☆☆) En informatique, on utilise un système binaire pour coder les caractères. un bit (*binary digit*) est un élément qui prend la valeur 0 ou 1. Un octet est composé de 8 bits. Combien de caractères un octet peut-il coder ?

Exercice 4 (★☆☆☆) Combien de numéros de téléphone à 10 chiffres peut-on former ?

Exercice 5 (★☆☆☆) Cinq élèves se mettent en rang. Combien de manières y a-t-il de les disposer les uns derrière les autres ?

Exercice 6 (★☆☆☆) Combien d'anagrammes du mot MATH existe-t-il ?

Exercice 7 (★☆☆☆) On dispose de huit boules dans un sac : trois noires, deux rouges et trois vertes.

1. On tire simultanément trois boules du sac.
   - **a)** Combien de tirages possibles existe-t-il ?
   - **b)** Combien de tirages comportent exactement deux boules noires ?
   - **c)** Combien de tirages comportent au moins une boule noire ?
2. On tire simultanément deux boules du sac. Combien de tirages comportent deux boules de la même couleur ?

Exercice 8 (★☆☆☆) Dans un bouchon Chez Bastien, trois collègues souhaitent se partager sept douzaines d'huîtres pour les fêtes.

Combien de répartitions possibles des huîtres y a-t-il sachant que chacun des amis doit en avoir au moins une ?

Exercice 9 (★★☆☆) Propriétés du produit cartésien

Soient A, B et C trois ensembles. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $A \times B = \varnothing \implies (A = \varnothing) \vee (B = \varnothing)$.

2. $\begin{cases} A \times B = A \times C \\ A \neq \varnothing \end{cases} \implies B = C$

3. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

4. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Exercice 10 (★★☆☆) Pour aller de A à D en passant par B et C, il y a 4 chemins possibles entre A et B, 3 chemins de B à C et deux de C et D.

De combien de façons peut-on :

1. aller de A à D en passant par B et C ?

2. aller et revenir entre A et D en passant par B et C ?

3. aller et revenir entre A et D en passant par B et C sans emprunter au retour le même trajet ?

Exercice 11 (★★☆☆) Combinaisons et probabilités, d'après Bac 2000

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :

— 4 jetons blancs marqués 0,

— 3 jetons rouges marqués 7,

— 2 jetons blancs marqués 2,

— 1 jeton rouge marqués 5.

4 jetons sont simultanément prélevés dans le sac. On considère les événements suivants :

A : « Les 4 numéros sont identiques ».

B : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2020 ».

C : « Tous les jetons sont blancs ».

D : « Tous les jetons sont de la même couleur ».

E : « Au moins un jeton porte un numéro différent des trois autres ».

F : « La somme des points est égale à 21 ».

1. Déterminer la probabilité de chacun de ces événements.

2. L'événement C étant réalisé, quelle est la probabilité de B ?

Exercice 12 (★★☆☆) Soient un entier $n \geqslant 2$ et $k \in [\![1,n-1]\!]$.

Montrer que

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i}{k-1}.$$

Exercice 13 (★★★☆) Anagrammes

1. Quel est le nombre d'anagrammes, c'est-à-dire le nombre de permutations des lettres du mot EXACT ?

2. Traiter la même question avec le mot BARRER en :

— numérotant les R,

— sans numéroter les R.

3. Quel est le nombre d'anagrammes du mot CORRECTEUR sans distinction pour les lettres C, E ou R ?

4. Justifier que le nombre d'anagrammes d'un mot comportant n lettres, l'ensemble des ces lettres étant constitué de n_1 lettres identiques, n_2 lettres identiques, ..., n_k lettres identiques, avec

$$\sum_{i=0}^{k} n_k = n,$$

est donné par la formule

$$\frac{n!}{\prod_{i=0}^{k} n_i!}.$$

Exercice 14 (★★★★) Formule de Van Der Monde

Soient n et m deux entiers naturels non nuls.

1. Développer, pour x réel quelconque, $(x+1)^n$, $(x+1)^m$ et $(x+1)^{n+m}$.
2. En déduire que, pour tout $p \in [\![0,n+m]\!]$:

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{n}{i}\binom{m}{p-i} = \binom{n+m}{p}.$$

3. En déduire la formule de Van Der Monde :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$