MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

Chapitre 1

Notions de logique, ensembles

Sommaire et Structure

1.1 Notions de logique

- L'Assertion et la Négation
- Connecteurs : Conjonction (ET) et Disjonction (OU)
- L'Implication et l'Équivalence
- Lois de structure et de De Morgan
- Prédicats et Quantificateurs (Universel, Existentiel)

1.2 Ensembles

- Notion d'ensemble et Inclusion
- Ensemble des parties et Égalité
- Opérations : Union et Intersection
- Différence et Complémentaire

L'Assertion Mathématique

Définition 1.1 — Assertion

Une assertion est un énoncé qui peut prendre deux valeurs logiques : vrai (V) ou faux (F), sans ambiguïté aucune.

Énoncé Mathématique	Valeur Logique
$2 < 3$	VRAIE (V)
$\omega = 3,14$	FAUSSE (F)*

La Négation (¬A)

A	$\neg A$
V	F
F	V

* Note : 3,14 est un décimal, alors que le réel transcendant ω (pi) a un développement illimité non périodique.

Connecteurs Fondamentaux : Conjonction et Disjonction

Le ET ($\wedge$)

Notation : $A \wedge B$

Vraie uniquement si A et B sont vraies simultanément.

Le OU ($\vee$)

Notation : $A \vee B$

Vraie si au moins l'une des deux assertions est vraie.

A	B	$A \wedge B$ (ET)	$A \vee B$ (OU)
V	V	**V**	**V**
V	F	F	**V**
F	V	F	**V**
F	F	F	**F**

L'Implication ($A \Rightarrow B$)

L'implication $A \Rightarrow B$ est définie formellement par l'assertion : $(\neg A) \vee B$.

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L'implication permet d'obtenir à partir d'une assertion vraie une autre assertion vraie. Si A est vrai et $A \Rightarrow B$ est vrai, alors B est vrai.

3 Exemple Contre-intuitif

L'assertion
(3 est pair $\Rightarrow$ 3 est multiple de 2)
est VRAIE.

Pourquoi ? Parce que la prémisse "3 est pair" est FAUSSE.
Or, le Faux implique le Vrai.

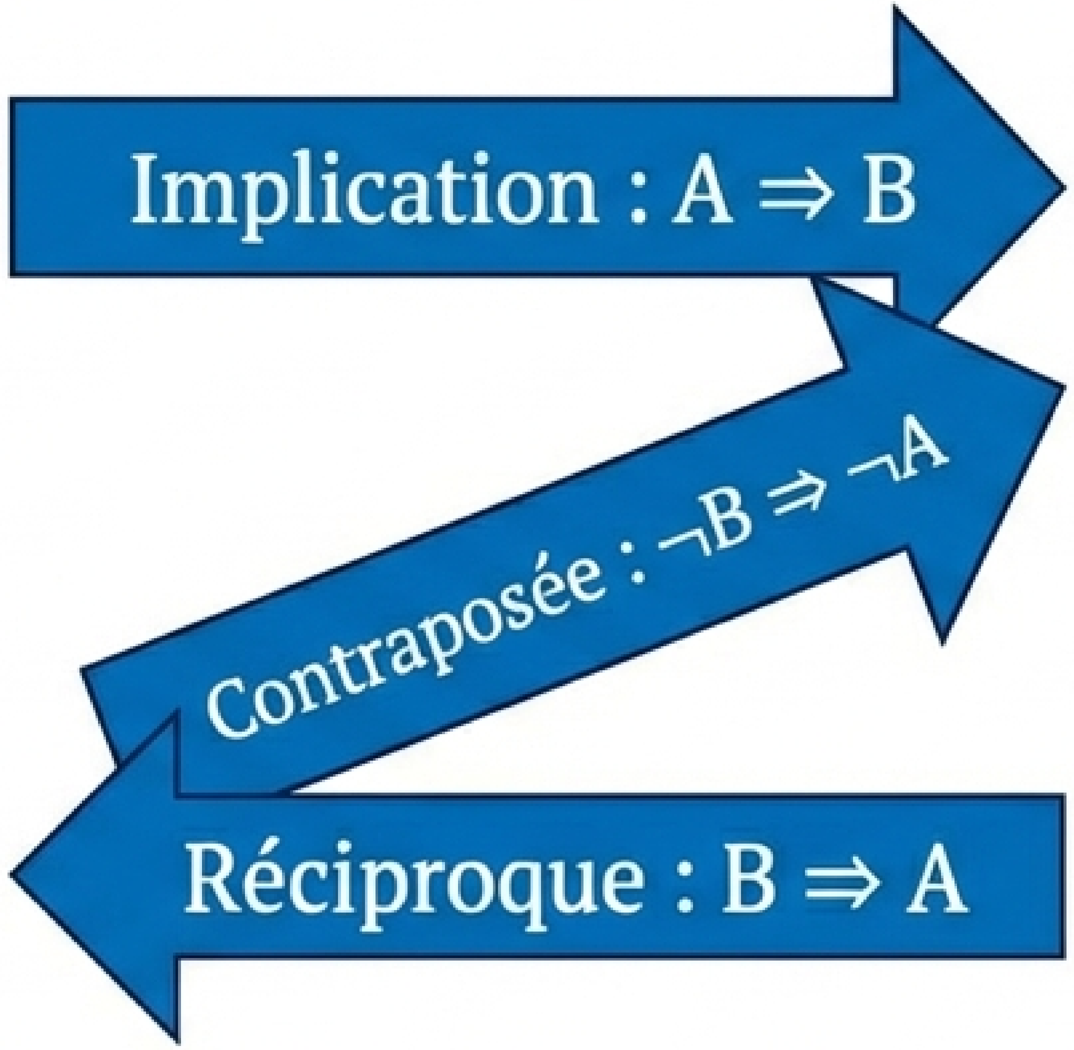
Équivalence, Réciprocité et Contraposée

L'Équivalence (⇔)

Définition :
$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Deux propositions sont équivalentes si elles ont exactement les mêmes tables de vérité.

Sens de l'implication



Théorème : Une implication est équivalente à sa contraposée.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Propriétés Structurelles des Connecteurs

Proposition 1.1

1. Associativité

$$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$$
$$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$$

---

2. Transitivité (de l'implication)

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

---

3. Distributivité

ET sur OU : $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

OU sur ET : $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Lois de De Morgan

Négation des groupes (Proposition 1.2)

Négation du ET

Négation du ET

$$\neg(A \land B) \iff (\neg A) \lor (\neg B)$$

Le ET devient OU

Négation du OU

$$\neg(A \lor B) \iff (\neg A) \land (\neg B)$$

Le OU devient ET

La négation d'une conjonction est la disjonction des négations.
La négation d'une disjonction est la conjonction des négations.

Prédicats et Quantificateur Universel

Prédicat $P(x)$: Une expression contenant une variable x appartenant à un ensemble E (le référentiel). Elle devient une assertion (V/F) une fois x fixé.

$\forall$

Pour tout / Quel que soit

$$\forall x \in E, \ P(x)$$

Signification : L'assertion $P(x)$ est vraie pour la totalité des éléments x de l'ensemble E sans exception.

Quantificateur Existentiel et Unicité

$\exists$

Il existe

Section 1: Existence simple

$$\exists x \in E, P(x)$$

Il existe au moins un élément de E tel que $P(x)$ soit vraie.

Section 2: L'Unicité ($\exists!$)

$$\exists!\, x \in E, P(x)$$

$$\exists x \in E, \big(P(x) \wedge \forall y \in E, (P(y) \Rightarrow y = x) \big)$$

1. **Existence** : Il y a un x qui vérifie P.
2. **Unicité** : Si un autre y vérifie P, alors ce y est obligatoirement égal à x.

Notion d'Ensemble et Inclusion

Un **ensemble** est une collection d'objets appelés éléments. Si x est un élément de E, on note : $x \in E$.

Appartenance ($\in$)

Relation entre un élément et un ensemble.

$$\boldsymbol{x \in E}$$

Inclusion ($\subset$)

Relation entre deux ensembles (Partie / Sous-ensemble).

$$F \subset E$$

Définition logique :

$$F \subset E \Leftrightarrow (\forall x \in F, x \in E)$$

Crucial Note : Distinction fondamentale : $x \in E$ mais $\{x\} \subset E$.

Ensemble des Parties et Égalité

Section 1: Ensemble des Parties

$$P(E)$$

$P(E)$ est l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de E.

$$\boxed{\boldsymbol{F \in P(E) \Leftrightarrow F \subset E}}$$

Section 2: L'Ensemble Vide

$$\emptyset \qquad \{\}$$

C'est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

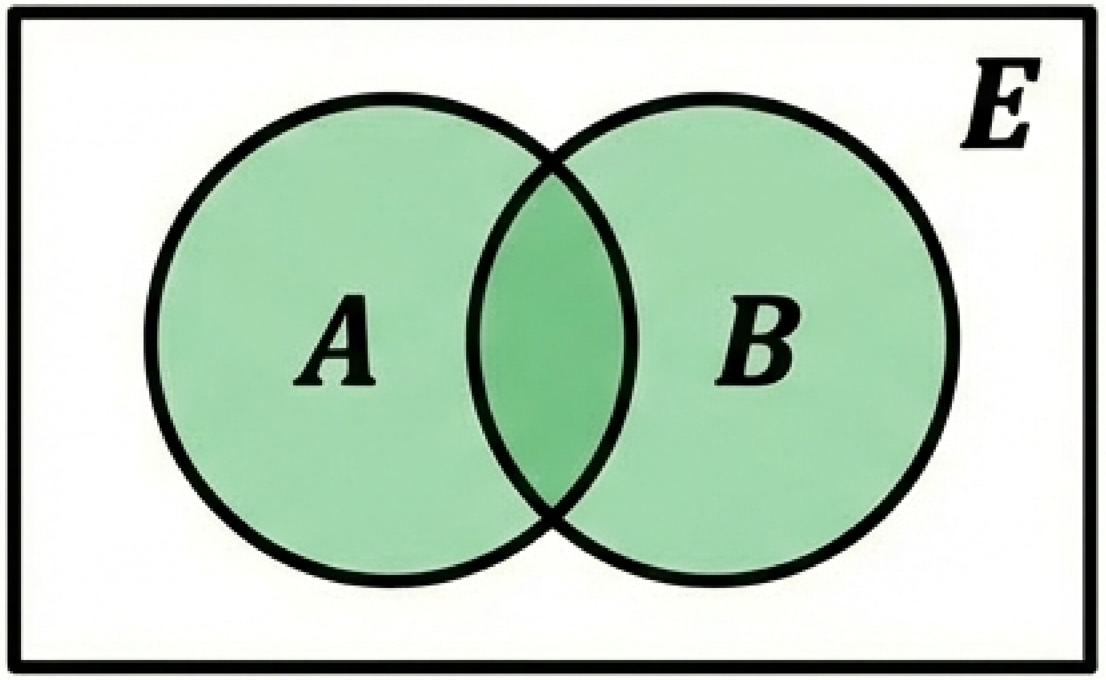
Section 3: Égalité des Ensembles

Deux ensembles sont égaux s'ils contiennent exactement les mêmes éléments.

$$\boxed{\boldsymbol{E = F \Leftrightarrow (E \subset F) \land (F \subset E)}}$$

Opérations : Union et Intersection

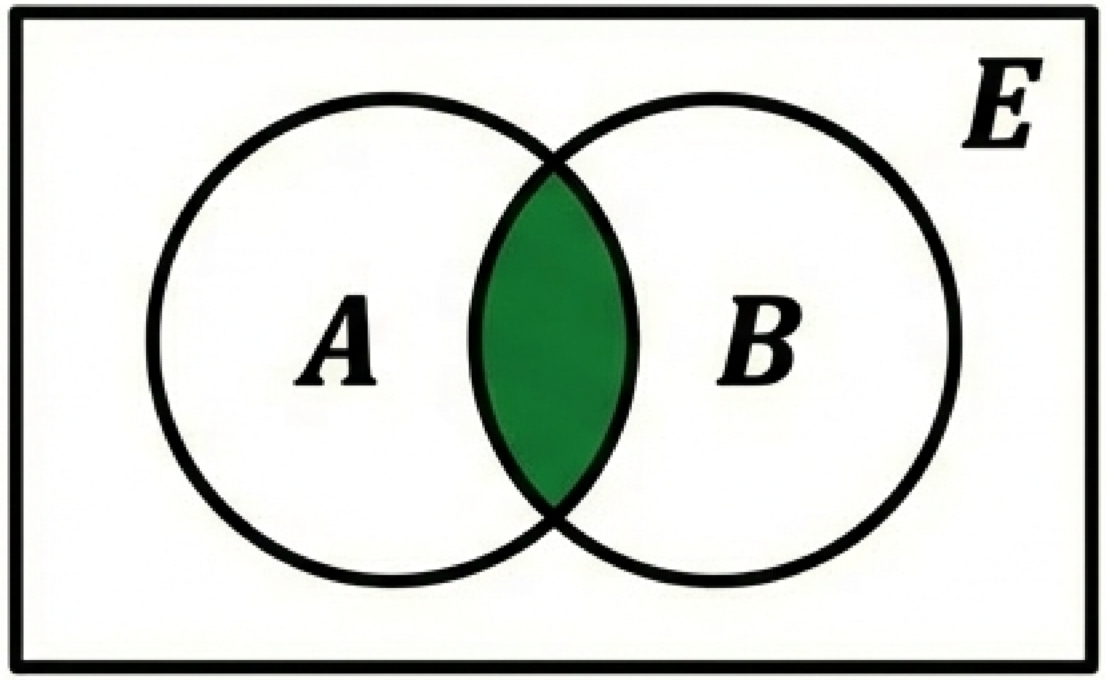
Union (∪)



$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Lien Logique : **OU**

Intersection (∩)



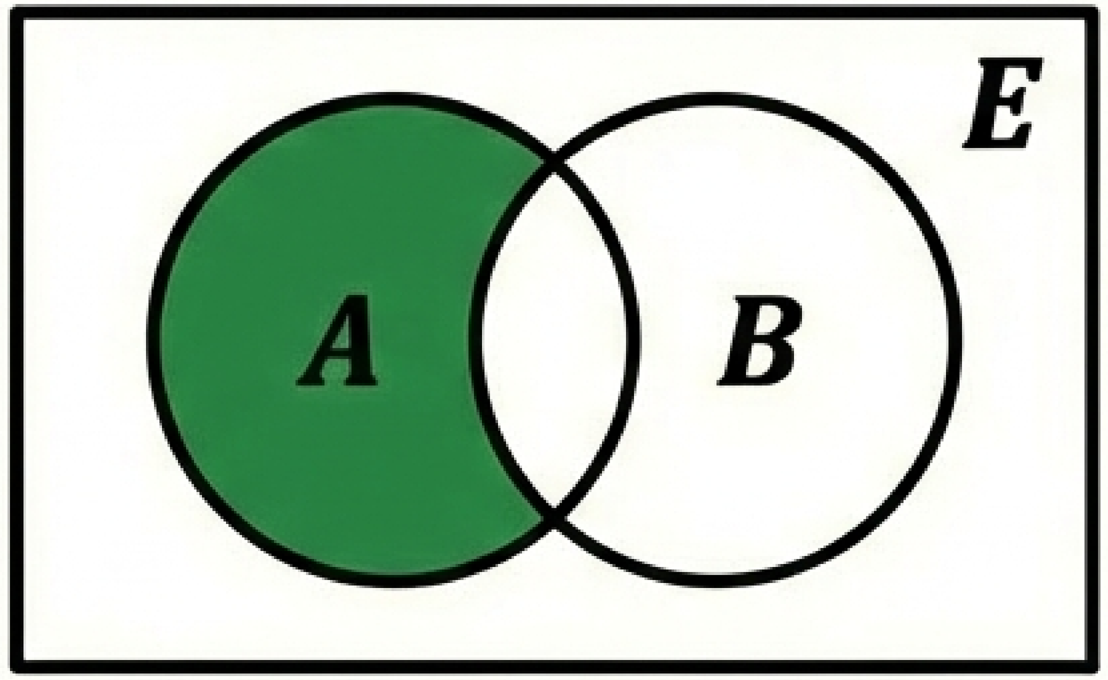
$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Lien Logique : **ET**

Si $A \cap B = \emptyset$, les ensembles sont dits disjoints.

Différence et Complémentaire

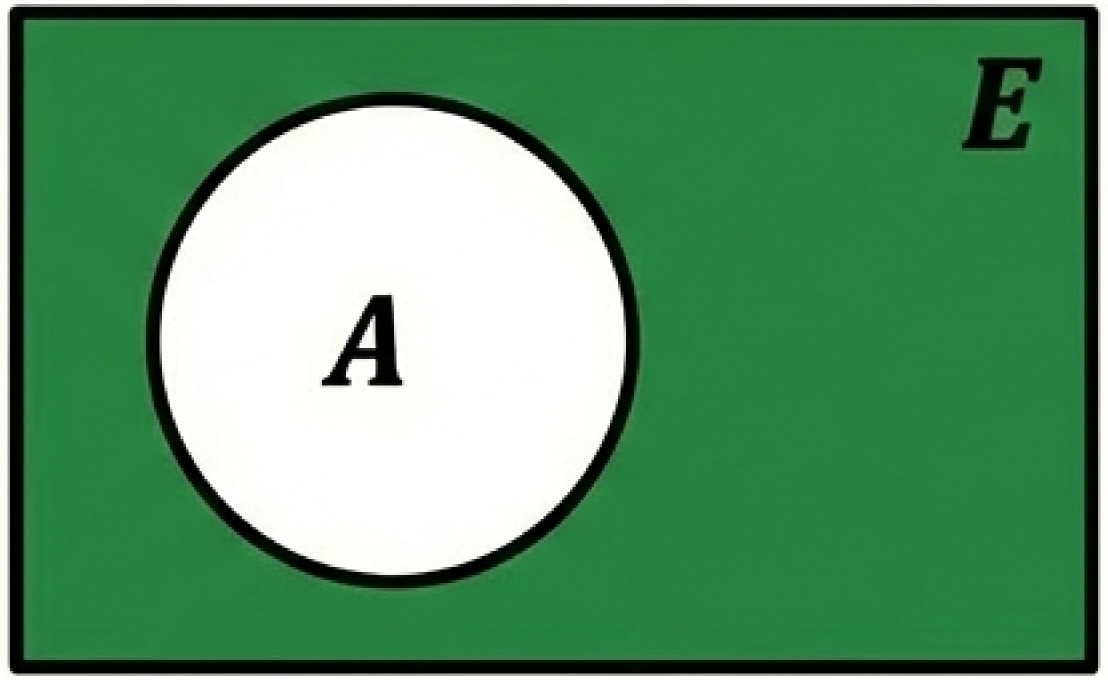
Différence ($A \setminus B$)



$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \land (x \notin B)\}$$

Complémentaire

C_E^A $\quad$ $\bar{A}$



$$C_E^A = E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

Correspond à la Négation logique.

Synthèse : Correspondance Logique - Ensembles

Isomorphisme structurel

LOGIQUE	ENSEMBLES
Disjonction ($\vee$)	Union ($\cup$)
Conjonction ($\wedge$)	Intersection ($\cap$)
Négation ($\neg$)	Complémentaire ($\boldsymbol{C_E^A}$)
Implication ($\Rightarrow$)	Inclusion ($\subset$)
Équivalence ($\Leftrightarrow$)	Égalité ($=$)
Faux ($\boldsymbol{F}$)	Ensemble Vide ($\emptyset$)
Vrai ($\boldsymbol{V}$)	Référentiel ($\boldsymbol{E}$)

"La théorie des ensembles est la traduction structurelle des règles de la logique."