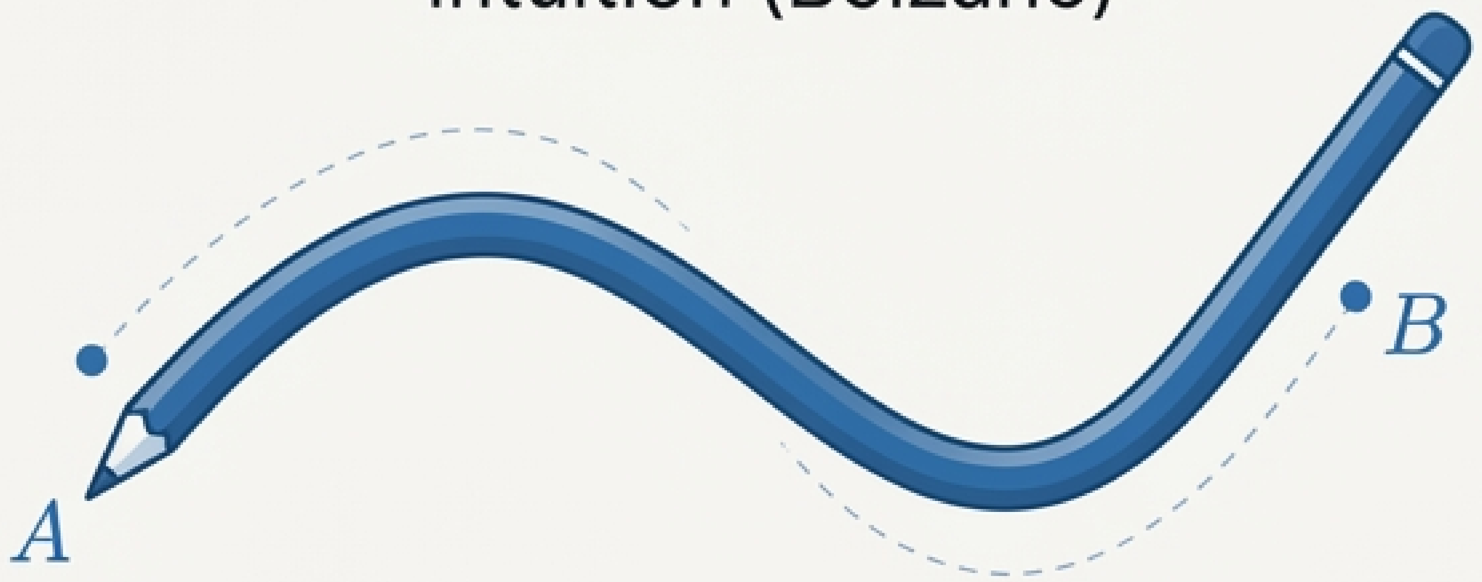
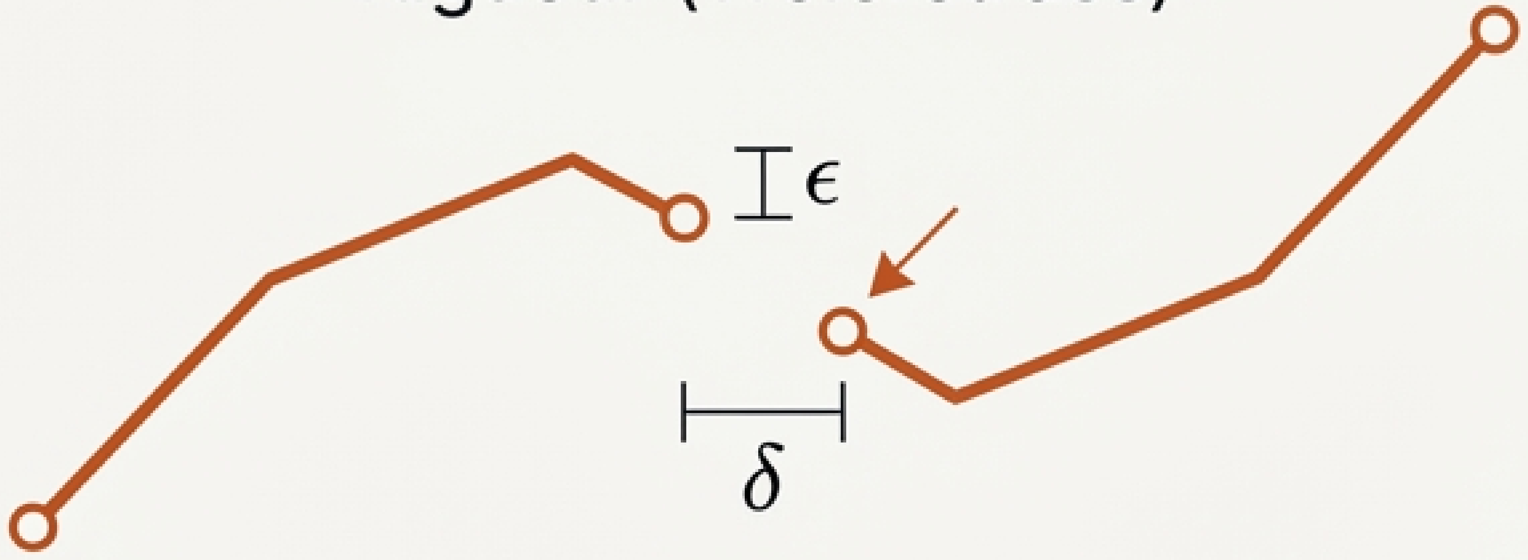
Chapitre 10 : Continuité

Du point à la courbe : rigueur et intuition

Intuition (Bolzano)



Rigueur (Weierstrass)



L'intuition historique

Une courbe tracée sans lever le crayon.

La définition moderne

Une formalisation par limites et voisinages.

Objectif

Comprendre comment le comportement local détermine la structure globale.

10.1 L'Infiniment Petit : La continuité en un point

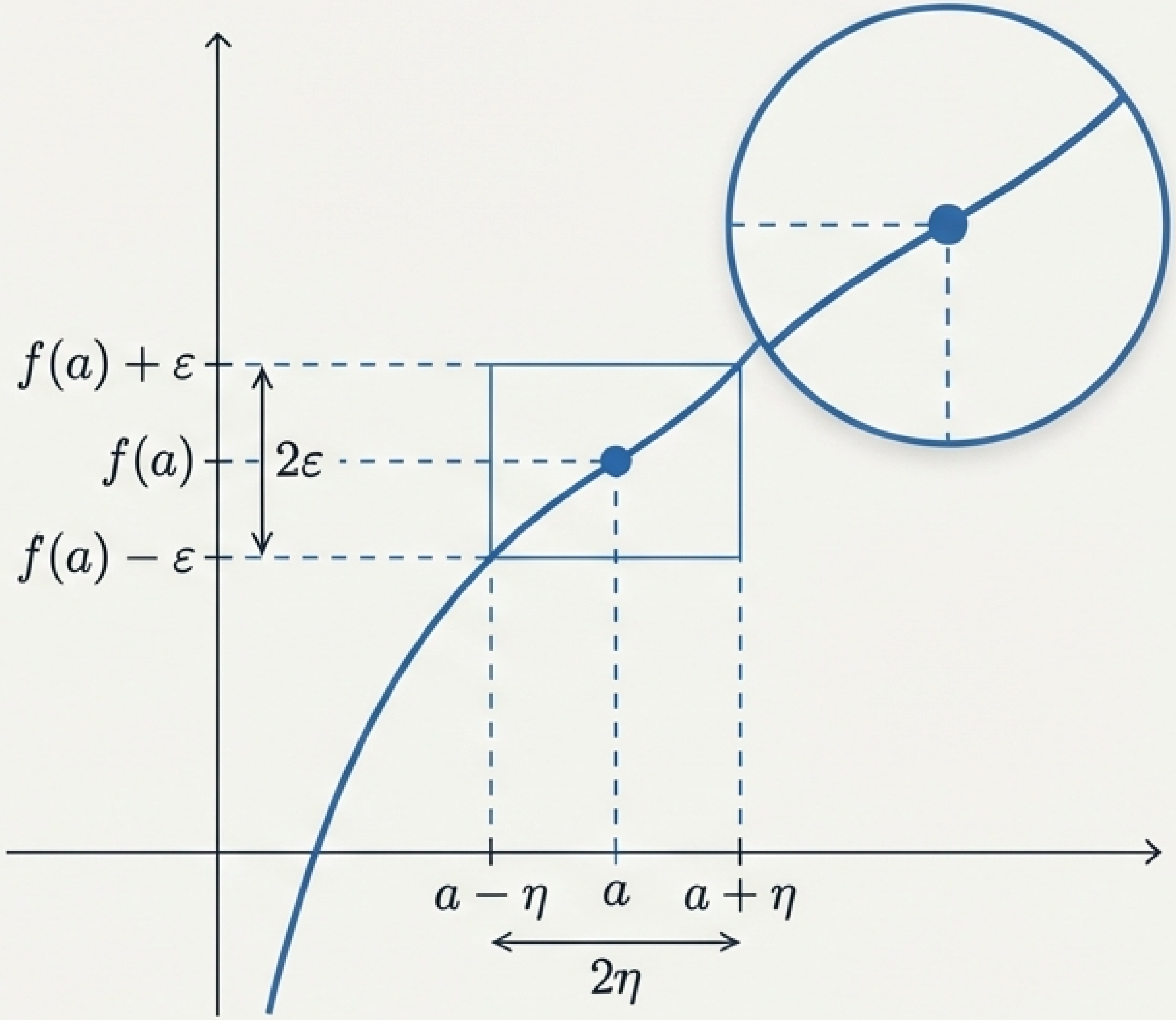
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Définition 10.1 :

f est définie sur un intervalle I et continue en $a \in I$.

Les Équivalences :

1. Limites : $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$
2. Quantificateurs :
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

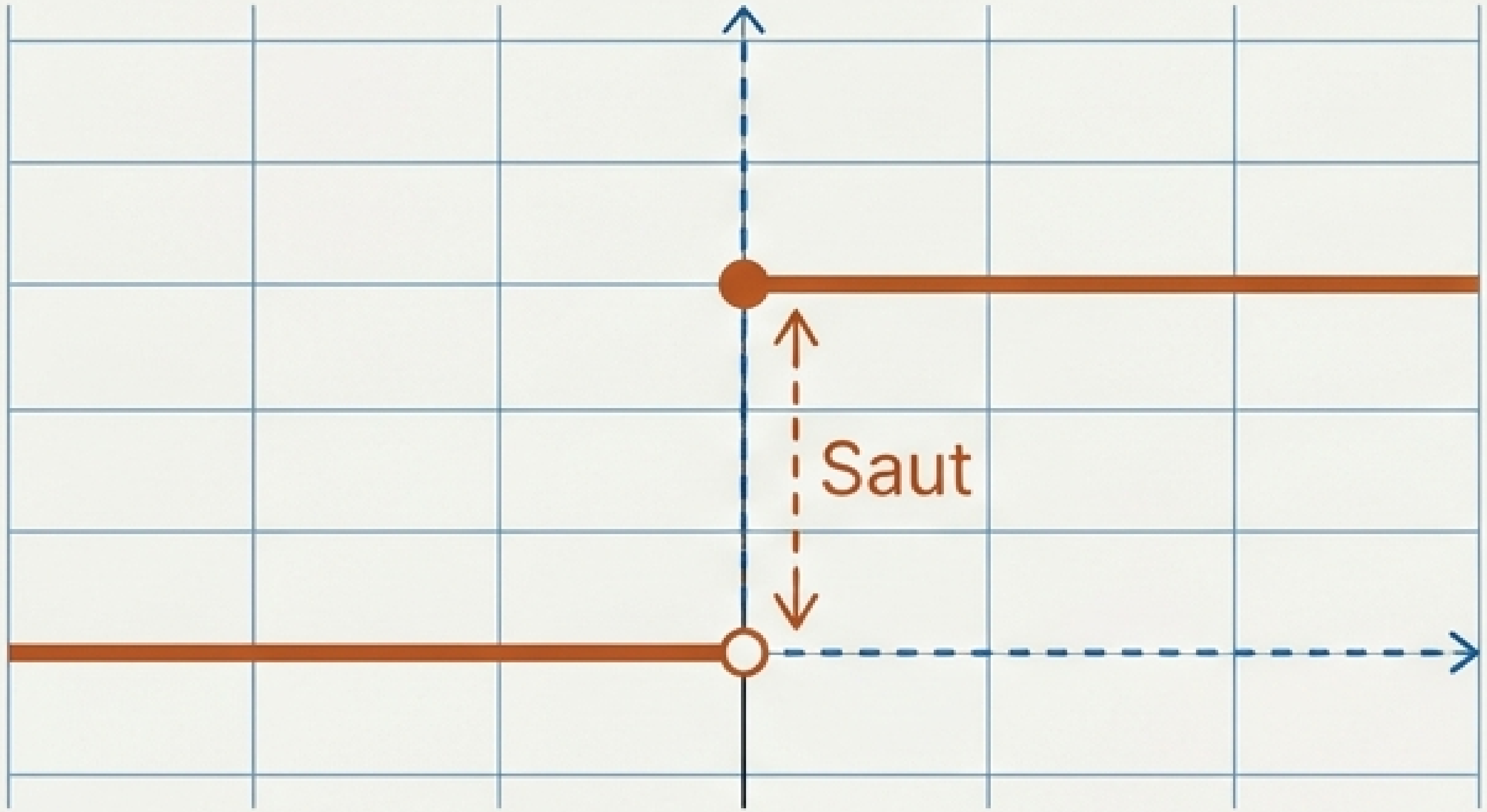


Important : f doit être définie en a.

Le « Crash Test » : Quand la continuité brise

Comparaison visuelle des discontinuités classiques

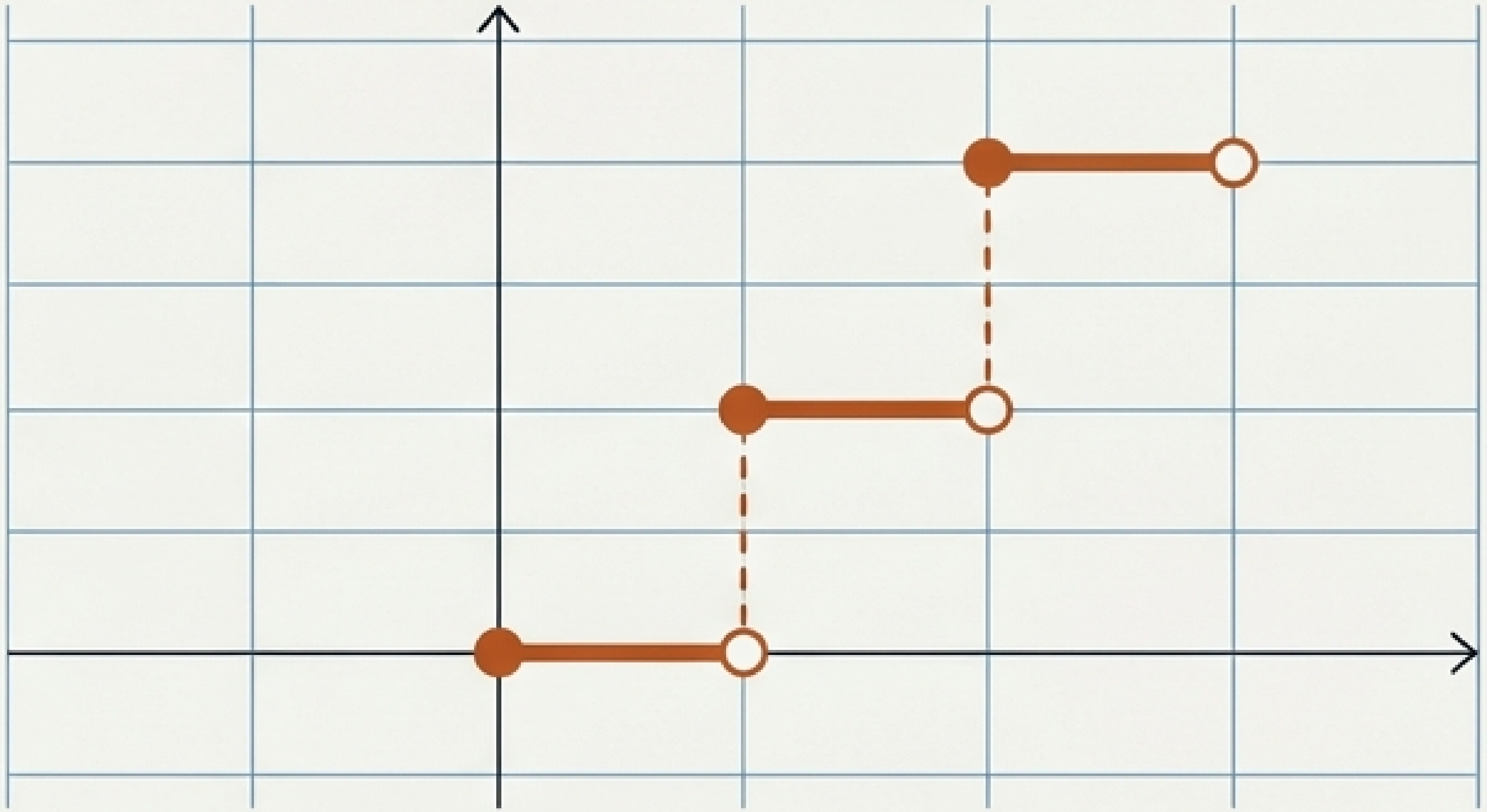
L'Échelon Unité $U(t)$



Discontinue en 0.

$$\lim_{t \to 0^+} U(t) = 1 \neq \lim_{t \to 0^-} U(t) = 0$$

La Partie Entière $\lfloor x \rfloor$

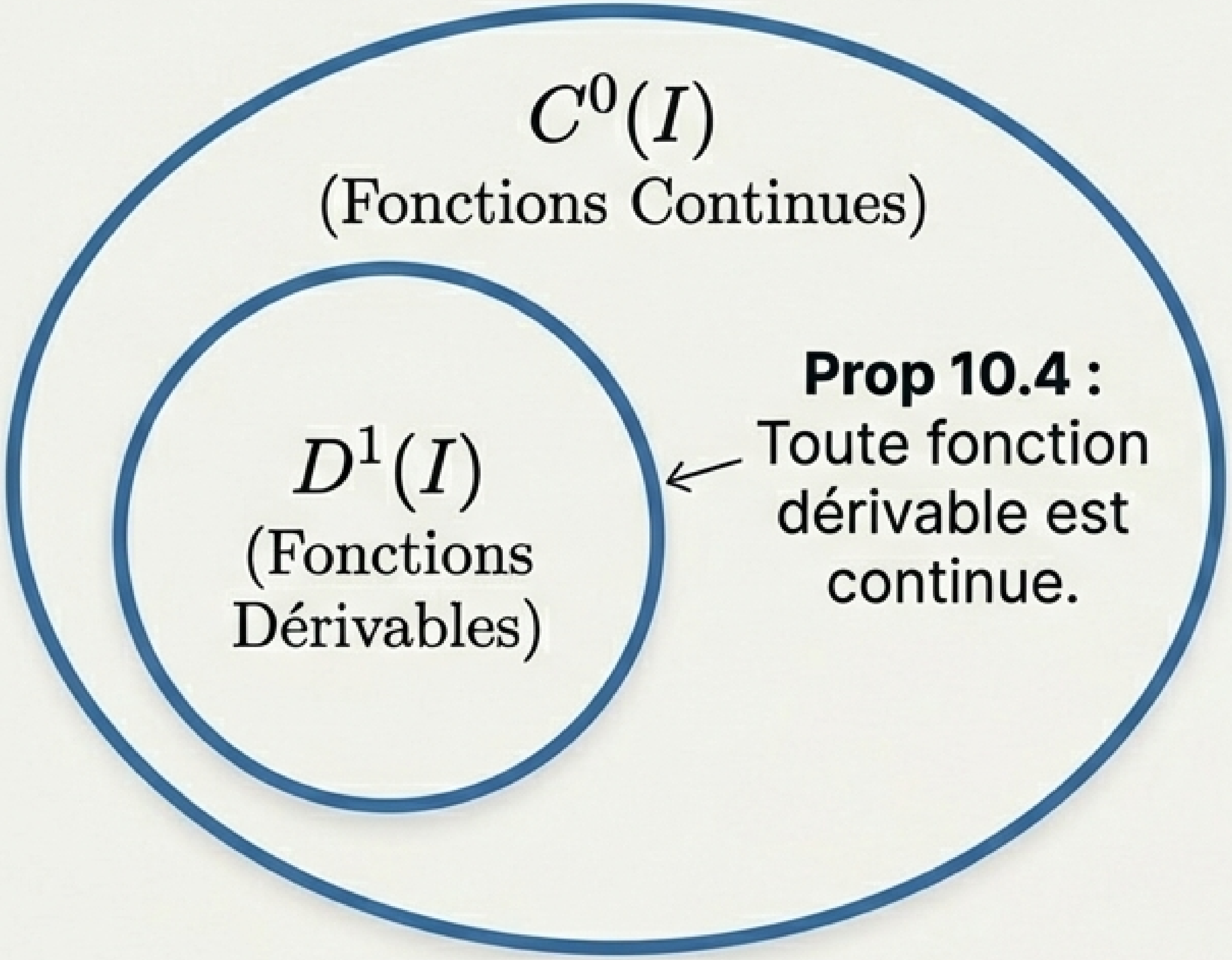


Discontinue sur chaque entier $n \in \mathbb{Z}$.

Le saut est systématique à chaque entier.

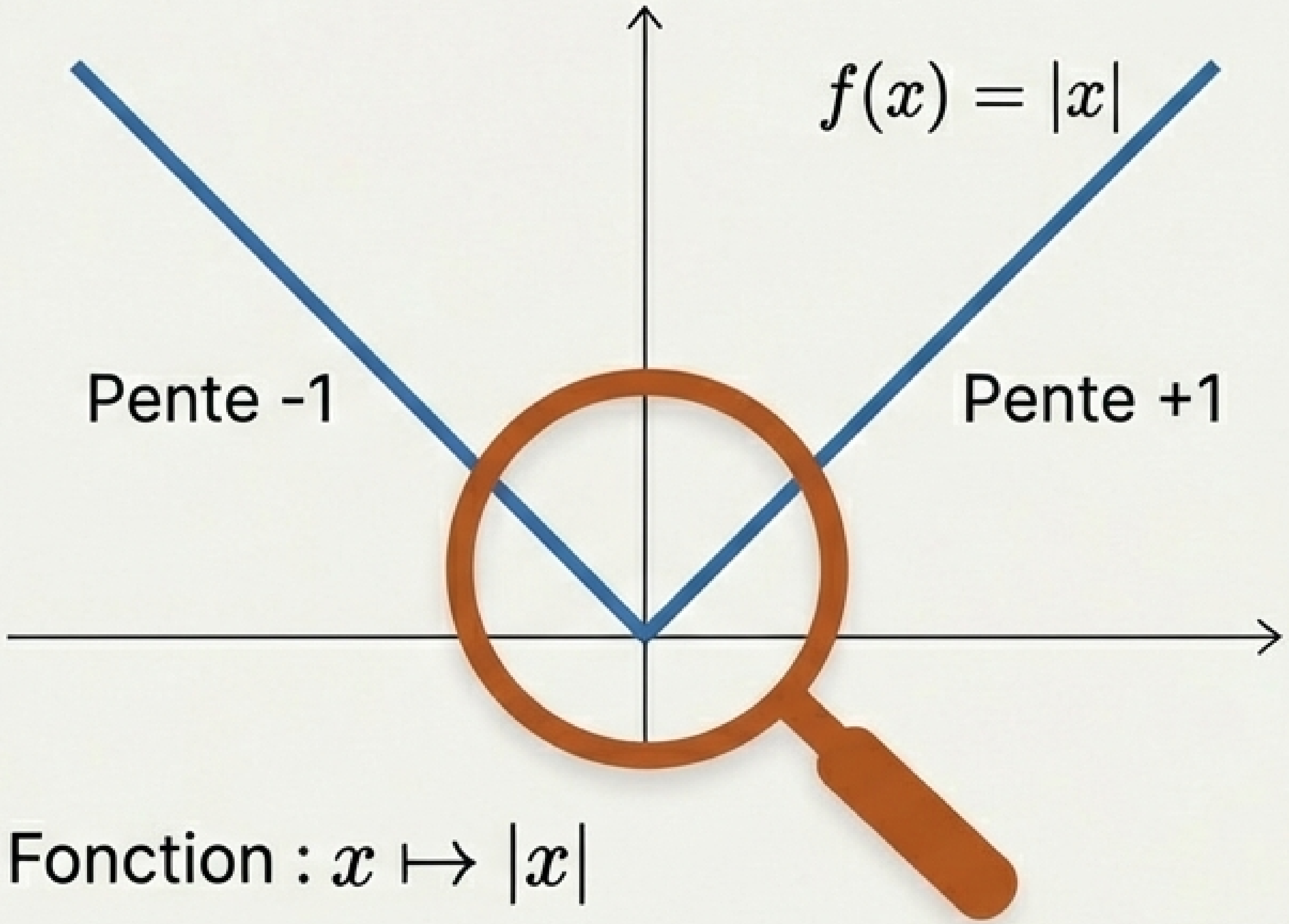
La continuité exige l'égalité des limites à **gauche** et à **droite**.

Continuité vs. Dérivabilité



$$C^{n+1}(I) \subset D^{n+1}(I) \subset C^n(I)$$

Attention : La réciproque est fausse



Fonction : $x \mapsto |x|$

✓ Continue en 0 ? **OUI** (Pas de saut)

✕ Dérivable en 0 ? **NON** (Point anguleux)

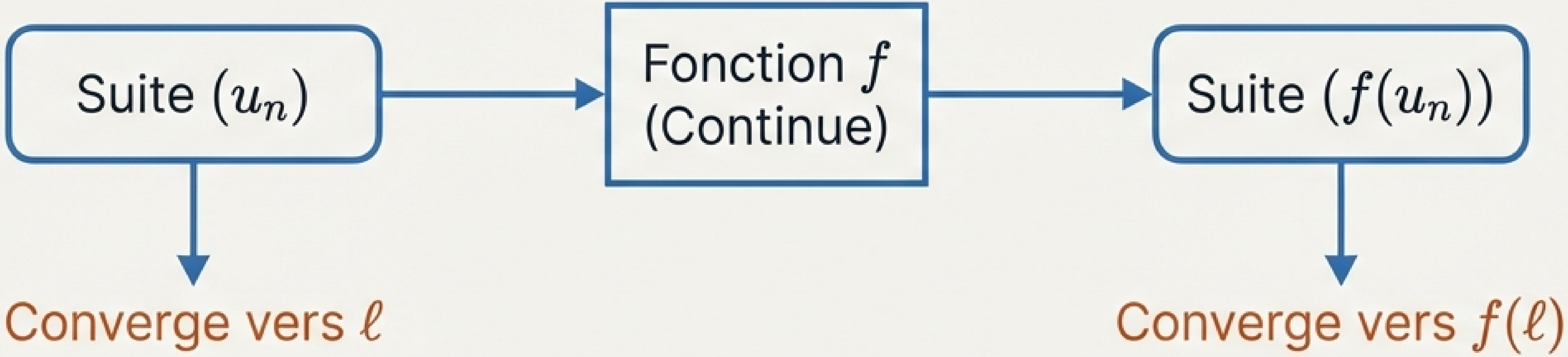
NotebookLM

Le Pont Séquentiel : Des suites aux fonctions

Proposition 10.9 (Caractérisation séquentielle)

Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$$



Application : Suites Récurrentes $(u_{n+1} = g(u_n))$

Si la suite converge vers ℓ et g est continue, alors ℓ est un point fixe.

$$g(\ell) = \ell$$

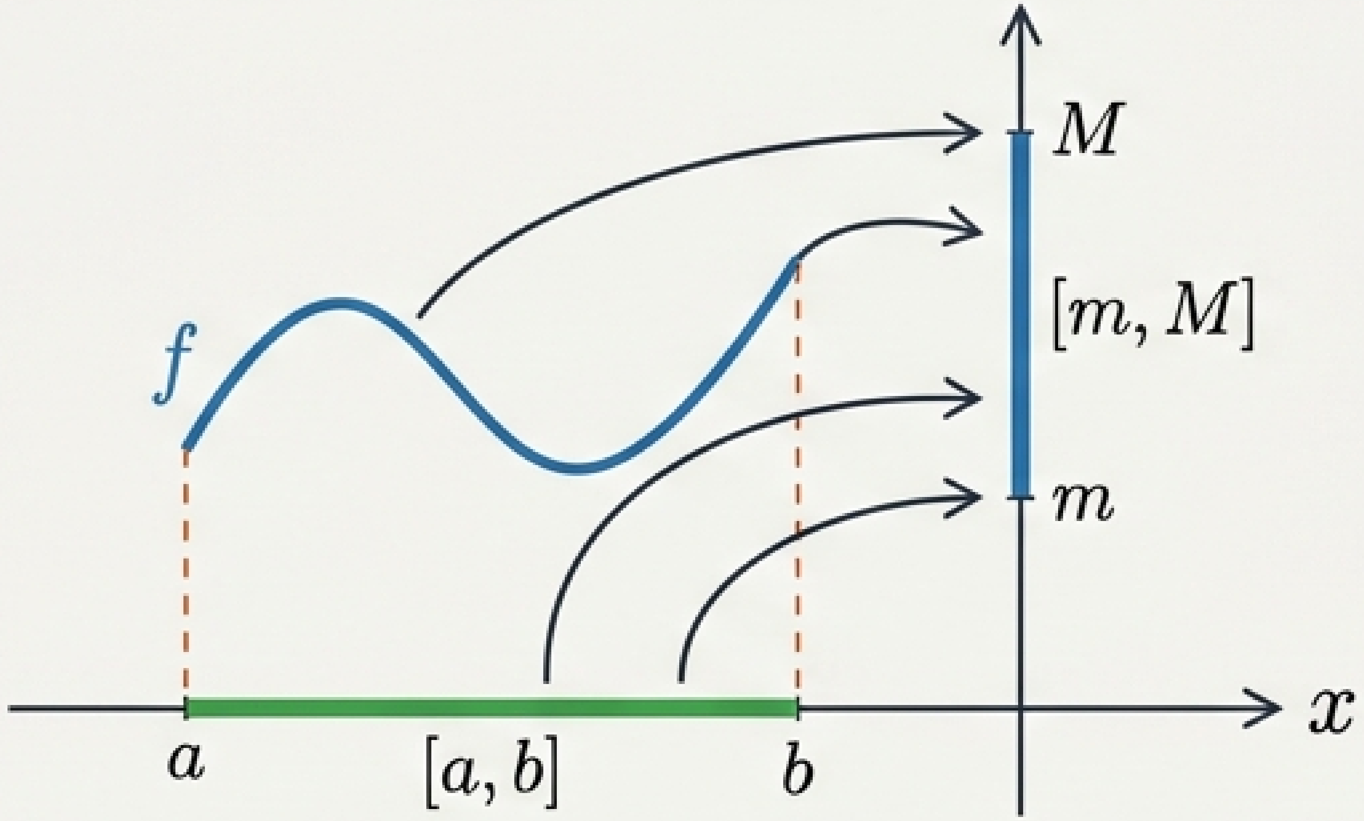
Exemple : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1-u_n) \Rightarrow \ell = \frac{1}{2}\ell(1-\ell) \Rightarrow \ell = 0.$

10.2 L'Infiniment Grand : La continuité sur un intervalle

Définition 10.2 : f est continue sur I si elle est continue en tout point $a \in I$.

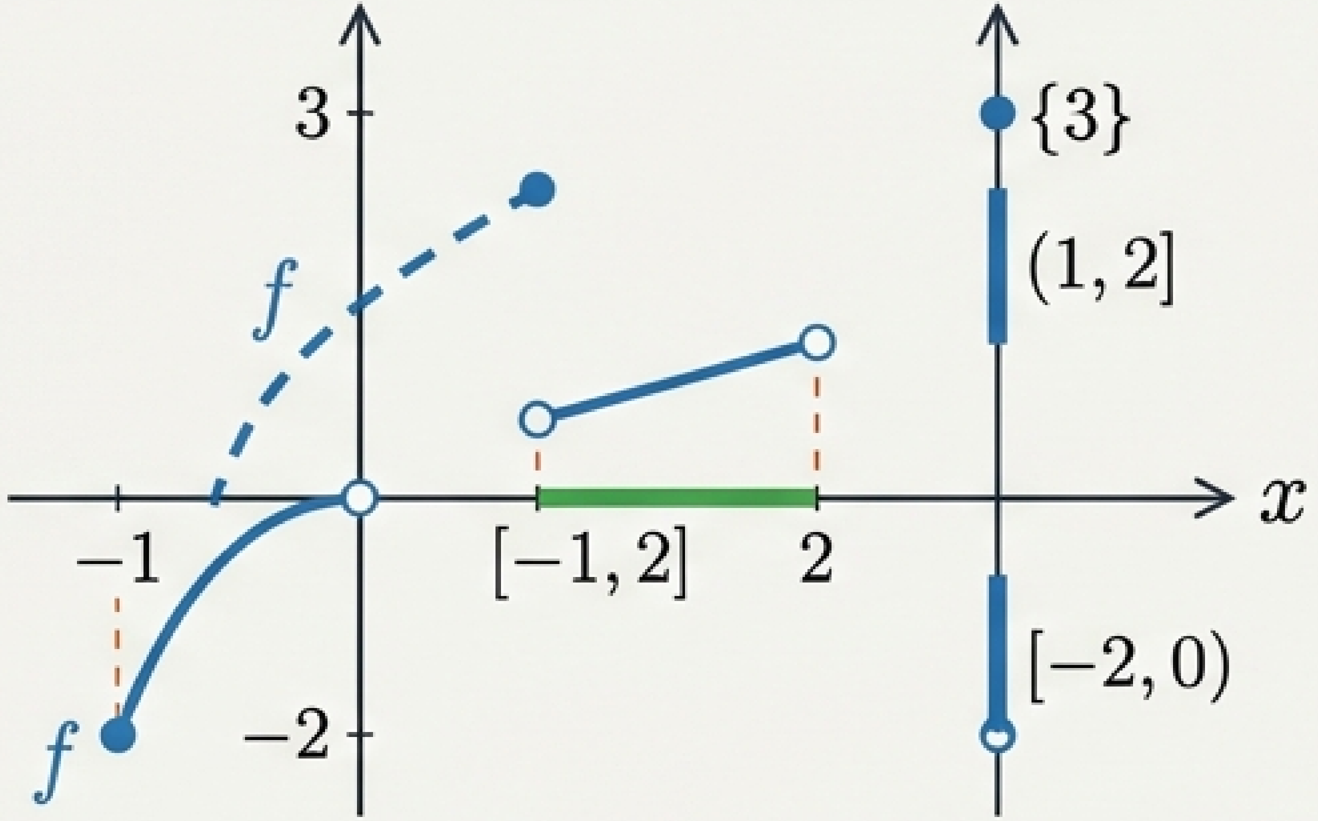
L'Image d'un intervalle

Conservation de la connexité



L'image d'un intervalle est un intervalle.

L'image n'est pas un intervalle (Morcelée)



L'image n'est pas un intervalle (Morcelée).

Théorème (Prop 10.14) : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)

Théorème 10.13

Hypothèses :

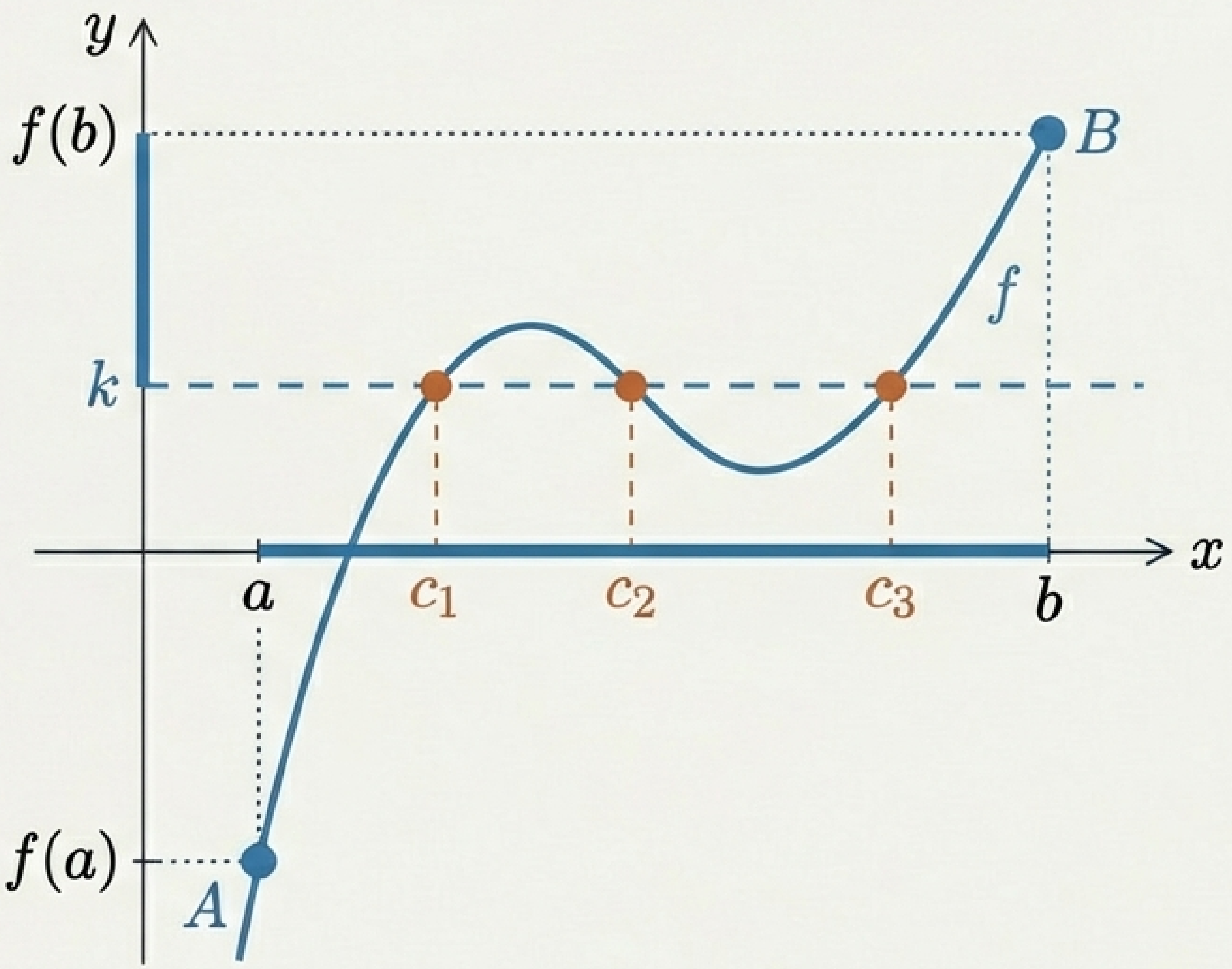
1. f est continue sur $[a, b]$.
2. k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Conclusion :

Il existe au moins un réel $c \in [a, b]$
tel que $f(c) = k$.

Notes :

- Existence assurée ($\exists c$).
- Non-unicité possible.
- Analogie : Pas de téléportation.



Au cœur de la preuve : Le Théorème de Bolzano

Construction par suites adjacentes

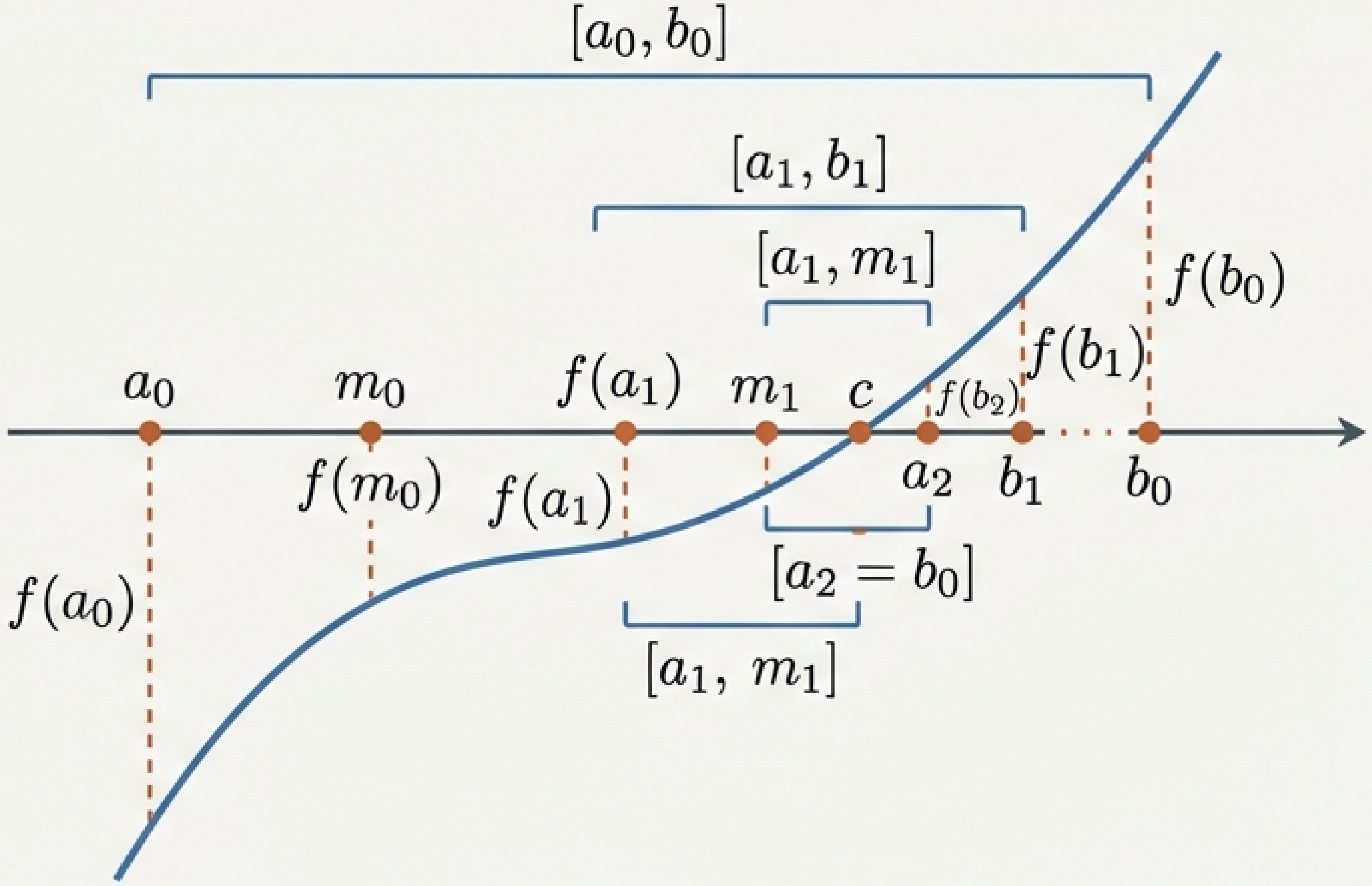
Cas particulier : Si $f(a)f(b) \leq 0$ (changement de signe), alors $\exists c, f(c) = 0$.

Suites u_n et v_n :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2}$$

$$\lim (v_n - u_n) = 0 \Rightarrow u_n \to c \text{ et } v_n \to c$$

Conclusion : $f(c) = 0$



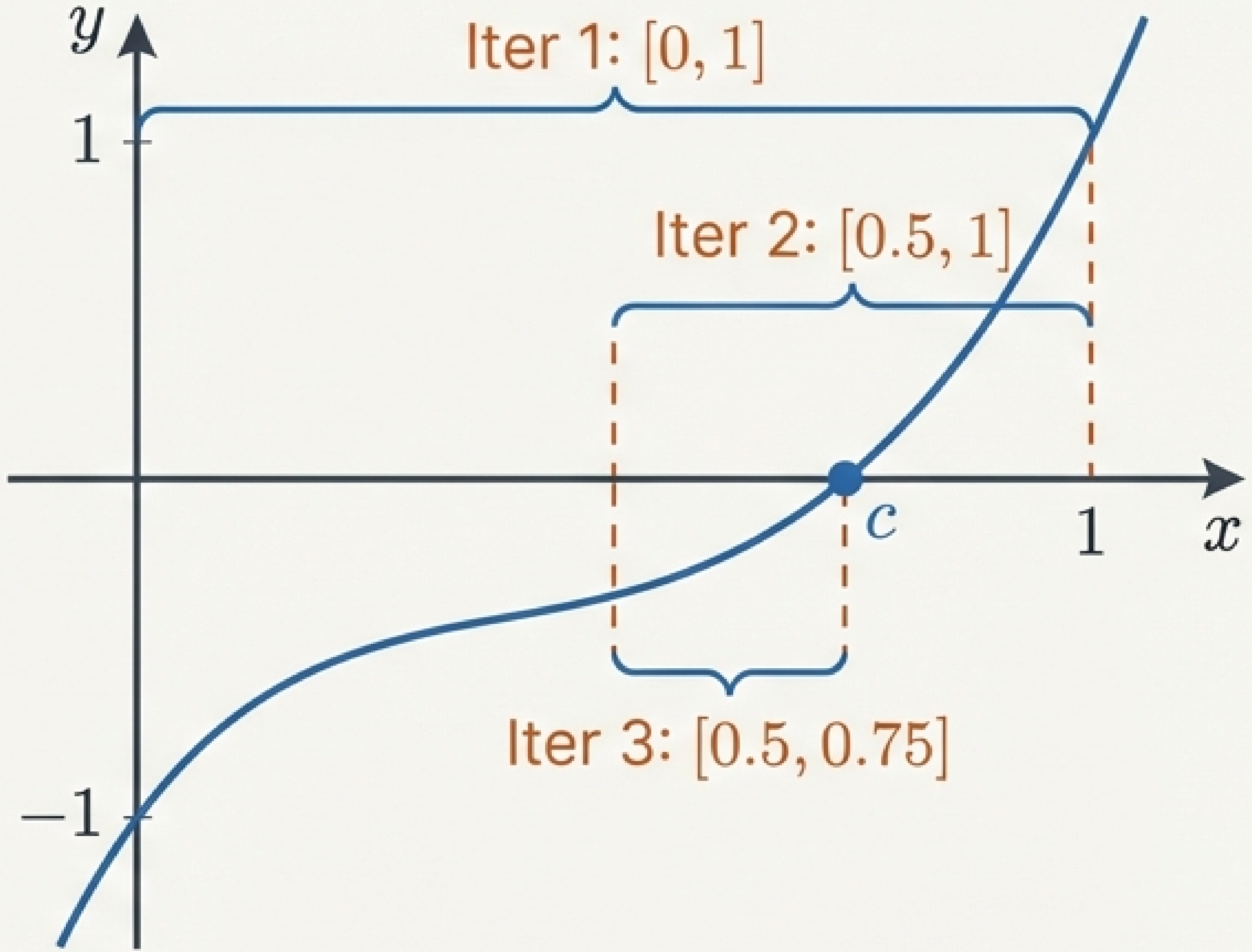
Application Algorithmique : La Dichotomie

L'algorithme en Python :

```
def dicho(f, a, b, p):
    while b - a > 10**(-p):
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) < 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return b
```

Efficacité : Convergence géométrique. L'intervalle est divisé par 2 à chaque boucle.

Exemple 10.7 : $x^3 + x - 1 = 0$



Approximation : $c \approx 0.683$

Le Théorème des Bornes

Image d'un segment (compact)

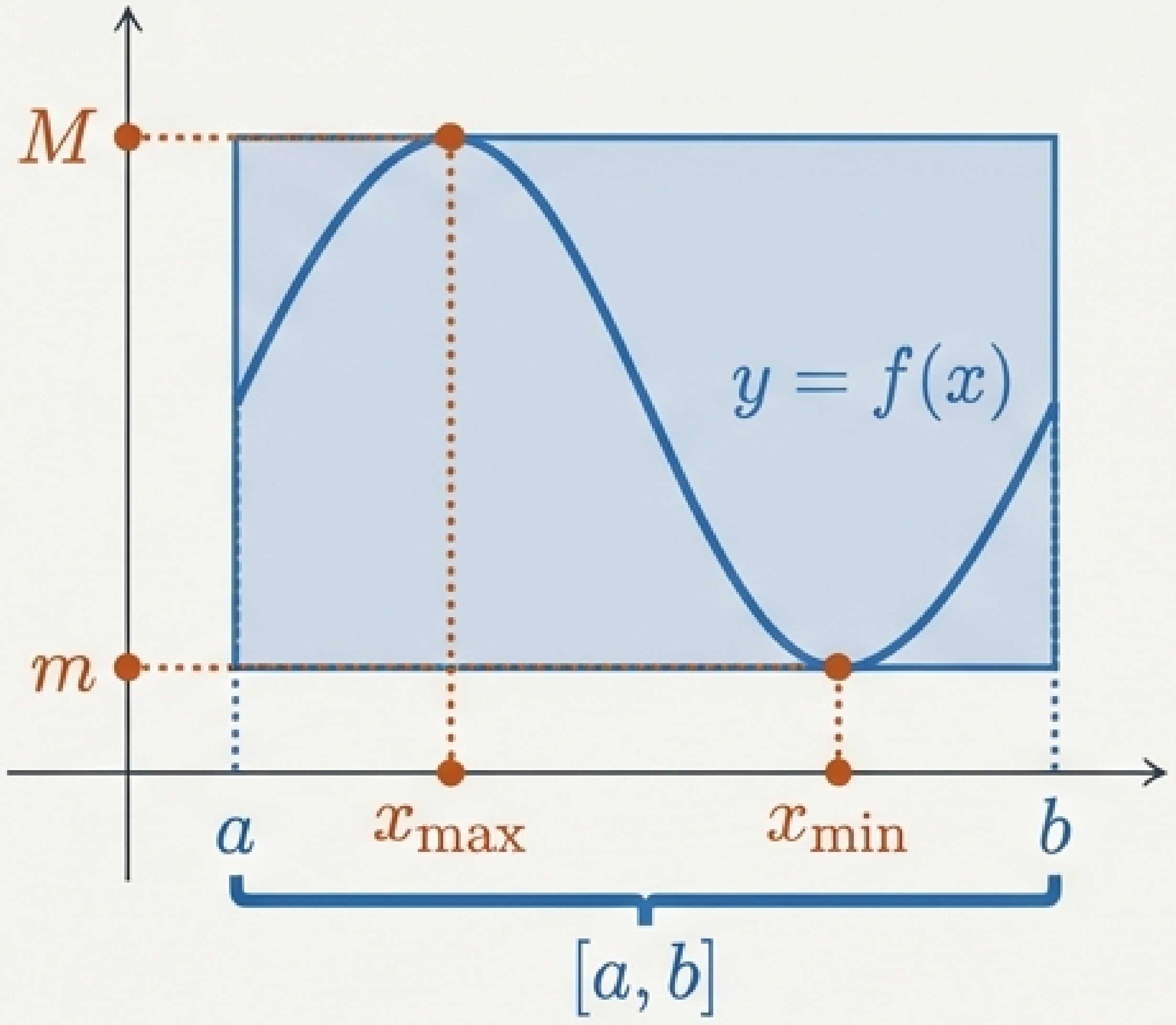
Proposition 10.16

Si f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors :

1. f est bornée.
2. f atteint ses bornes.

$$f([a, b]) = [m, M]$$

où $m = \min f$ et $M = \max f$.



Contre-exemple : Sur un intervalle ouvert $]0, 1[$, la fonction $1/x$ n'est pas bornée.

La Puissance de la Monotonie

Théorème de la Bijection (10.18)

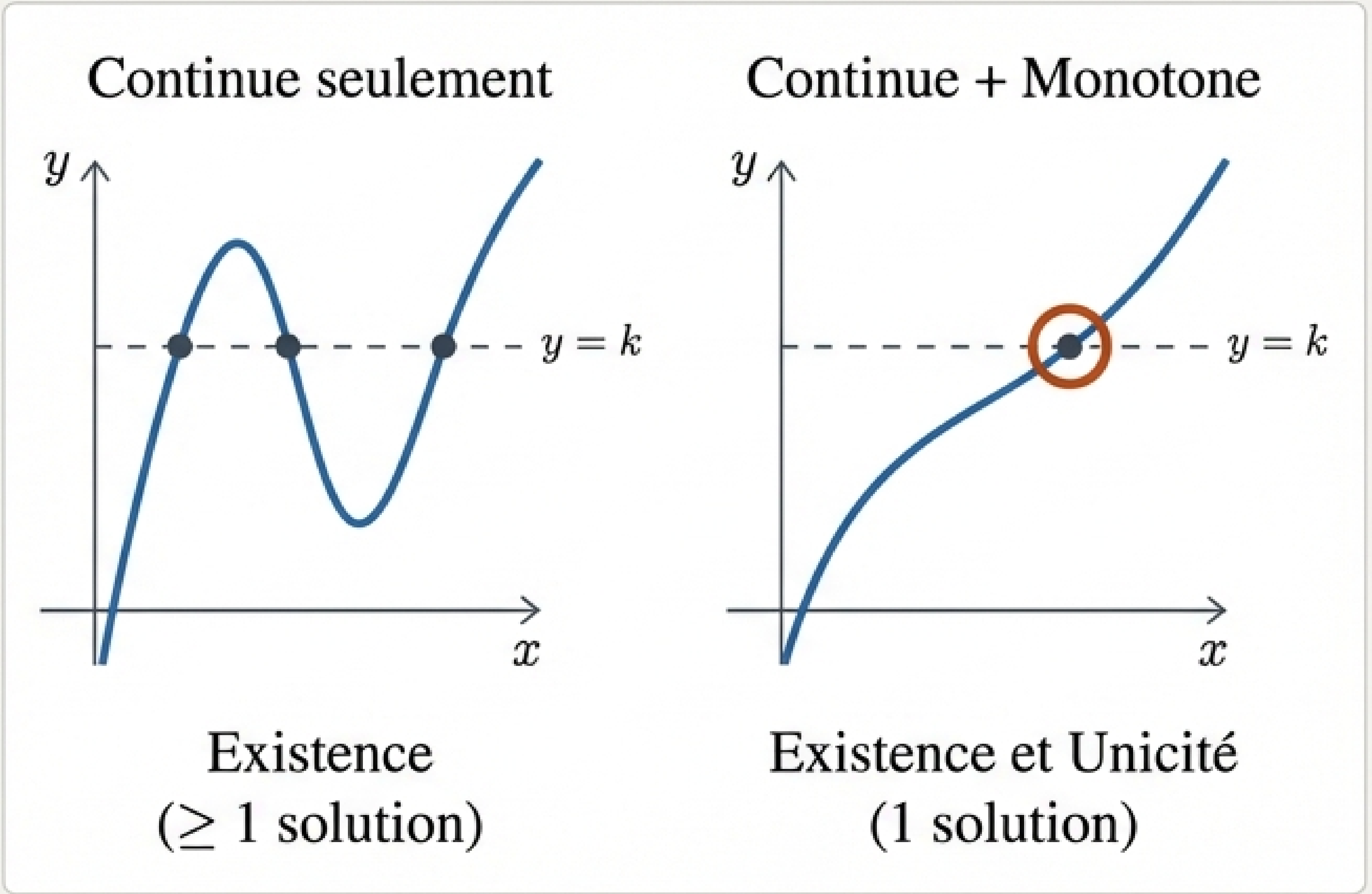
Conditions :

1. f continue sur I.
2. f strictement monotone sur I.

Résultat :

f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

L'équation $f(x) = k$ admet une solution **unique**.



Application : La fonction racine n-ième

Problème : Résoudre $x^n = a$ $(a \geq 0)$.

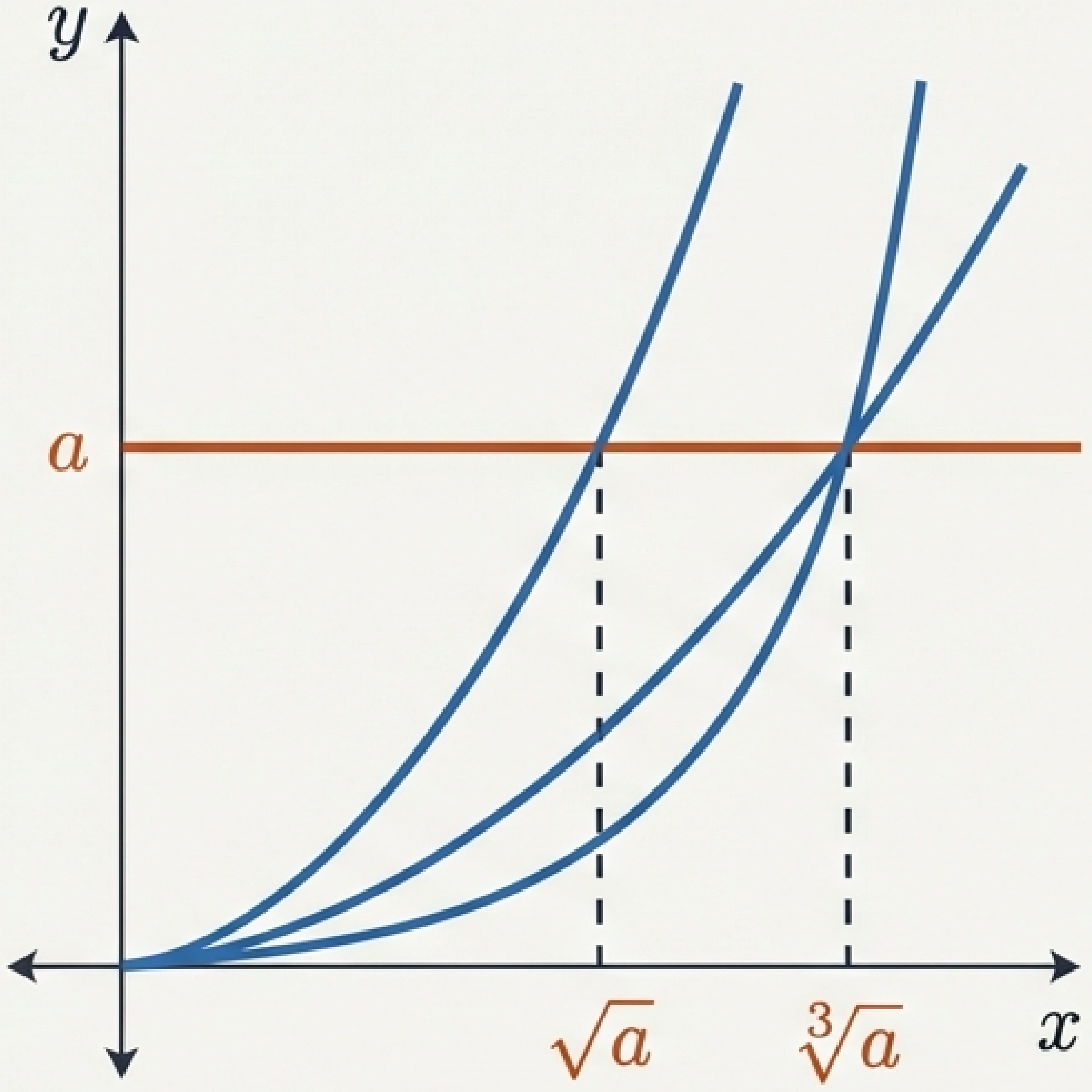
Outil : Théorème de la Bijection.

Analyse :

- Soit $f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}^+$.
- f est continue.
- f est strictement croissante.
- $f(\mathbb{R}^+) = [0, +\infty[$.

Définition :
L'unique solution est notée $\sqrt[n]{a}$.

Propriété : $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$



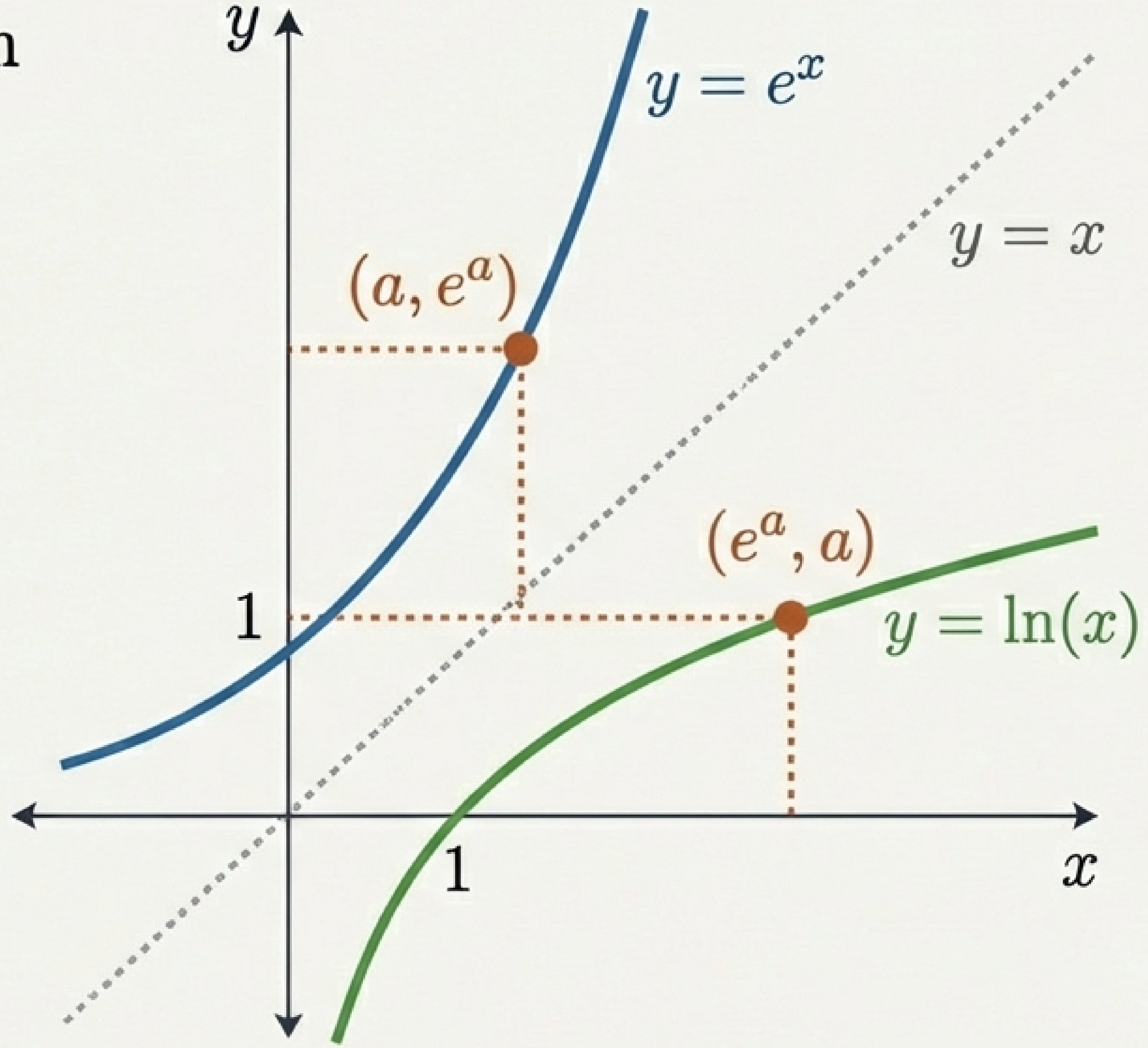
$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

Vers le Chapitre 12 : Le Logarithme Népérien

Application du théorème de la bijection à la fonction exponentielle.

1. La fonction $x \mapsto e^x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Son image est $]0, +\infty[$.
3. Pour tout $y > 0$, l'équation $e^x = y$ a une solution unique.

Définition : $x = \ln(y)$.

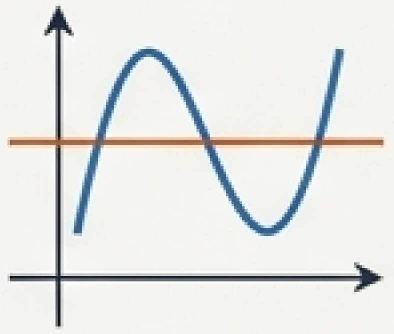


Synthèse & Stratégie

Arbre de décision pour les problèmes de continuité

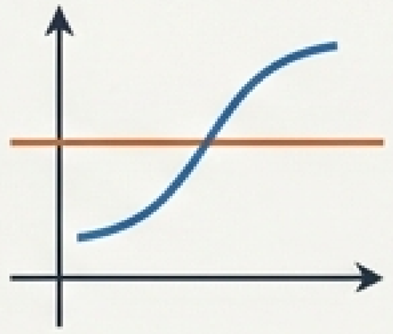
Quel est votre objectif ?

- Prouver l'existence d'une solution → **Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)**



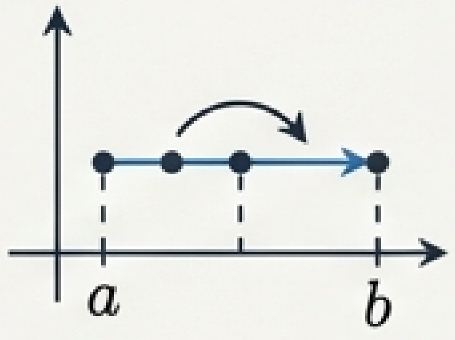
- Prouver l'existence ET l'unicité → **Théorème de la Bijection**

(TVI + Monotonie stricte)



- Trouver une valeur approchée → **Algorithme de Dichotomie**

Méthode numérique



- Étudier l'image d'un segment → **Théorème des Bornes**

$$f([a,b]) = [m, M]$$

La continuité est la clé de voûte entre la topologie (intervalles) et l'algèbre (résolution d'équations).