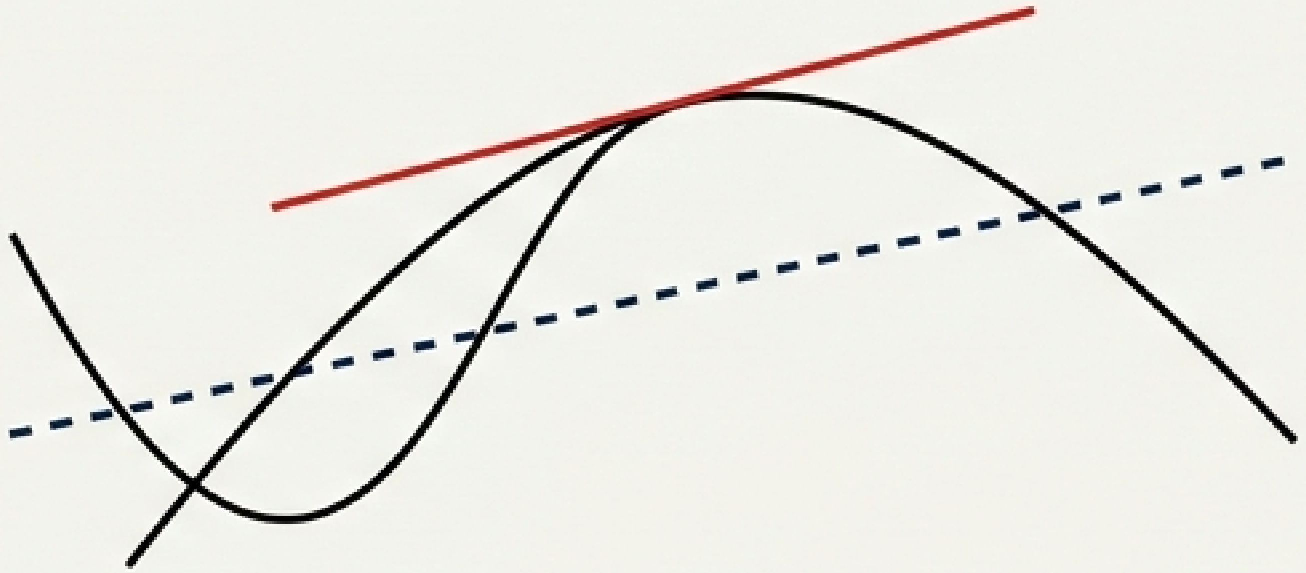
Dérivation : Compléments & Approfondissements

De la mécanique du calcul à la justification théorique des variations.



I. CALCUL

Composées, dérivées n-ièmes et formule de Leibniz.

II. GÉOMÉTRIE

Convexité, position par rapport aux tangentes et inflexion.

III. THÉORIE

Théorèmes de Rolle et des Accroissements Finis (TAF).

Dérivée d'une Fonction Composée (Le Cas Général)

Proposition :
Si u est dérivable sur I et g dérivable sur J (avec $u(I) \subset J$), alors $g \circ u$ est dérivable sur I.

$$(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$$

$$\boxed{x} \xrightarrow{u} \boxed{u(x)} \xrightarrow{g} \boxed{g(u(x))}$$

Multiplication des taux : $g' \times u'$

Exemple 11.1 : La Gaussienne

Fonction : $f(x) = e^{-x^2}$

Décomposition :

1. $u(x) = -x^2 \Rightarrow u'(x) = -2x$
2. $g(X) = e^X \Rightarrow g'(X) = e^X$

Résultat :

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$$

Généralisation : Fonctions Puissance et Racines

Application directe de la formule $(g \circ u)'$.

Function Type	General Formula	Constraints
Puissance entière ($p \in \mathbb{Z}^*$)	$(u^p)' = p \cdot u' \cdot u^{p-1}$	
Racine carrée	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	pour $u > 0$
Racine n-ième	$(\sqrt[n]{u})' = \dfrac{u'}{n} u^{\frac{1}{n}-1}$	pour $n \geq 2, u > 0$

Exemple d'application (Ex 11.2) :

$f(x) = \sqrt{\sin x}$ sur $]0, \pi[$

$$f'(x) = (\sin x)' \times \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

Dérivées d'Ordre Supérieur

Définition par Récurrence

La dérivée seconde f'' est la dérivée de la fonction dérivée f'.

Genéralization :

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

Notations

Lagrange : $f''(x), \quad f^{(3)}(x), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x)$

Leibniz : $\dfrac{d^2y}{dx^2}, \ \dfrac{d^3y}{dx^3}, \ \ldots, \ \dfrac{d^ny}{dx^n}$

$$f(x) = x^{-1}$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dx}$$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dx}$$

$$f''(x) = (-1)(-2) \cdot x^{-3} = 2x^{-3}$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dx}$$

$$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(-3) \cdot x^{-4} = -6x^{-4}$$

$$\vdots$$

Formule générale (Conjecture) :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

La Formule de Leibniz

Dérivée n-ième d'un produit de fonctions.

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Analogie structurelle : Formule du binôme de Newton $(a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

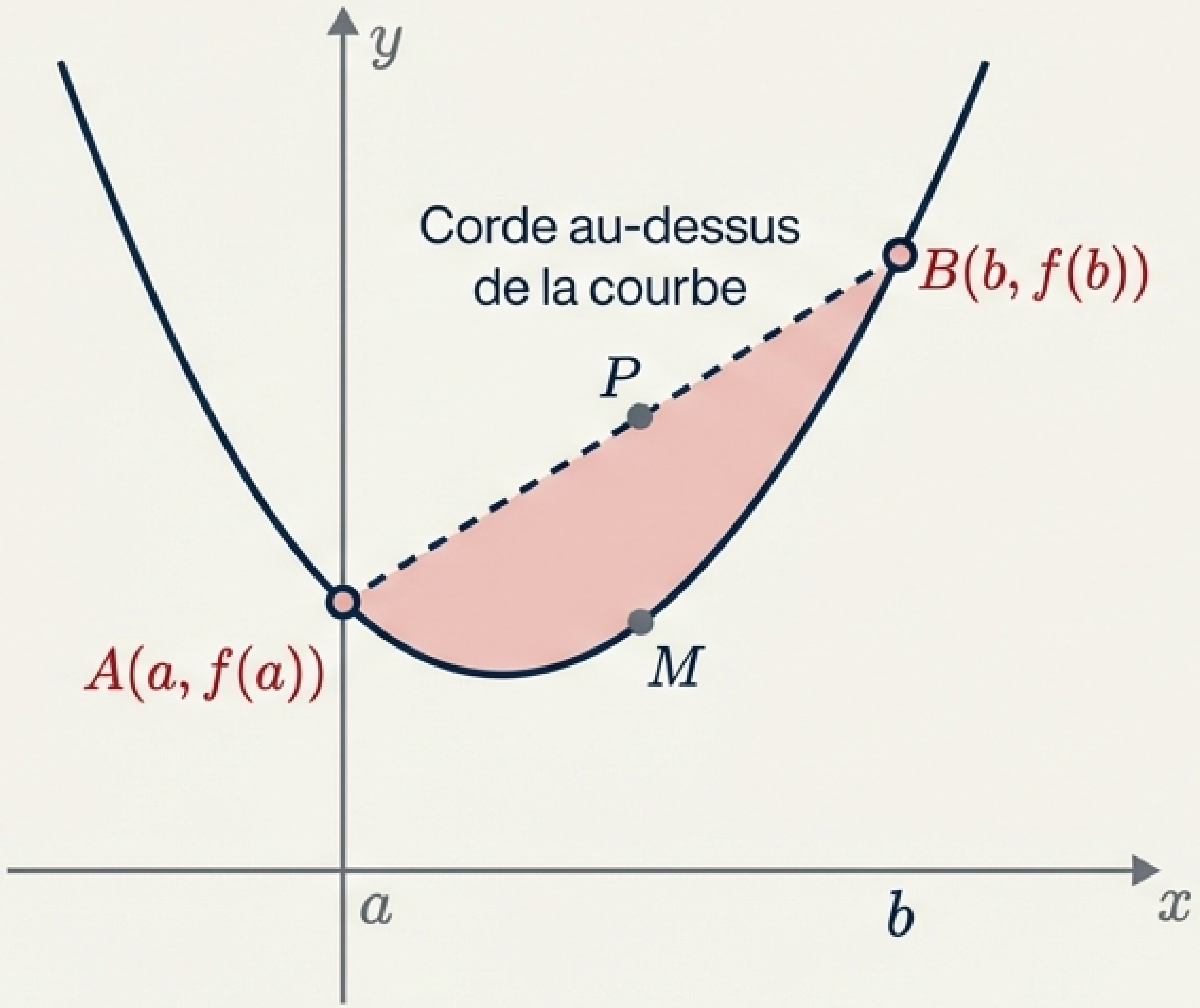
Stratégie de Calcul (Exemple 11.9)

Calcul de la dérivée n-ième de $h(x) = x^2 e^{-x}$.

$u = x^2$	$v = e^{-x}$
$u' = 2x$, $u'' = 2$, $u^{(k)} = 0$ pour $k \geq 3$. La somme s'arrête !	$v^{(k)} = (-1)^k e^{-x}$

$$h^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x} \left(x^2 - 2nx + n(n-1)\right)$$

Convexité : Approche Géométrique



Intuition

Une fonction est **convexe** si la courbe “tient l’eau”.

Définition Formelle

Le segment $[AB]$ est situé **au-dessus** de la courbe C_f.

Inégalité

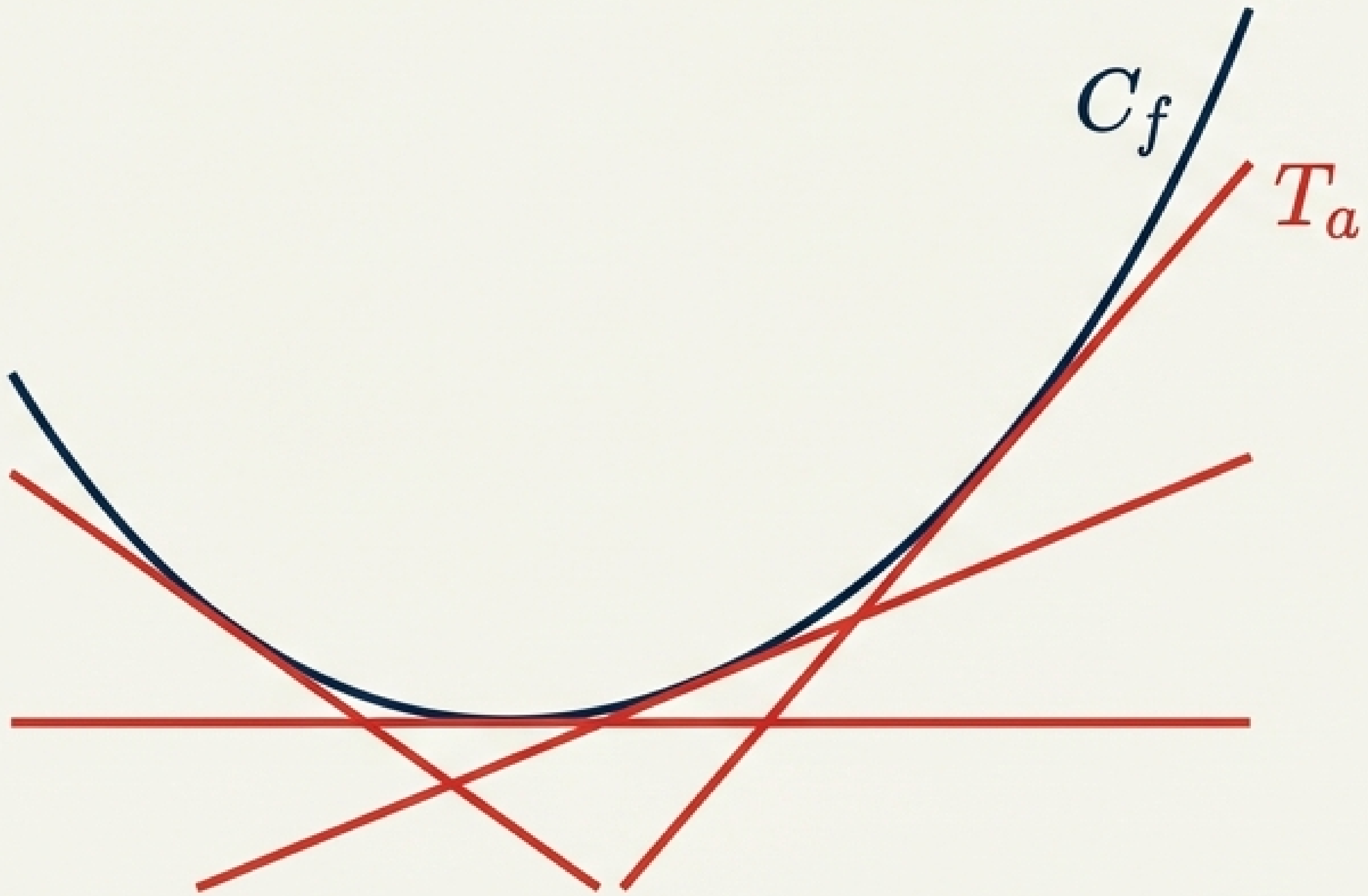
$\forall k \in [0{,}1]$,

$$f(ka + (1-k)b) \leq kf(a) + (1-k)f(b)$$

Position Relative aux Tangentes

Une fonction dérivable est **convexe** si et seulement si sa courbe est située entièrement **au-dessus** de ses tangentes.

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$$



Application : Inégalité de Bernoulli

La fonction $x \mapsto x^n$ ($n \geq 2$) est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

En utilisant la tangente en $x = 1$, on obtient :

$$(1 + t)^n \geq 1 + nt$$

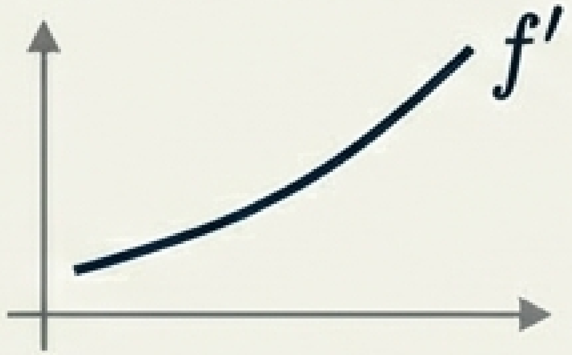
(pour tout $t \geq 0$)

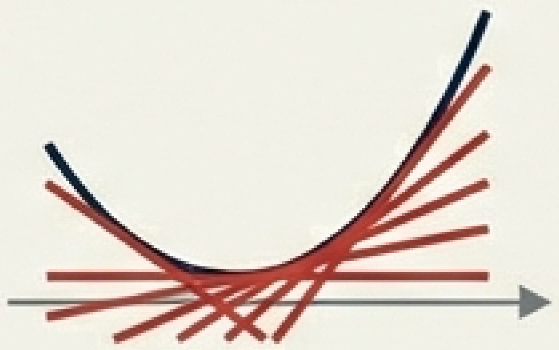
Le Critère de la Dérivée Seconde

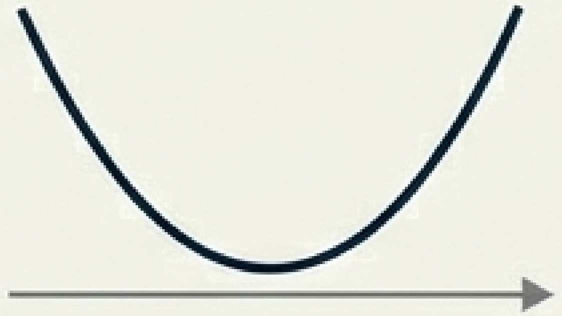
Le lien entre calcul et géométrie.

$f''(x) \geq 0$ → f' est croissante → La pente augmente → FONCTION CONVEXE

Signe positif







Exemples Types (Ex 11.12)

$f(x) = x^2$	$f(x) = e^x$
$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ **Convexe** sur $\mathbb{R}$	$f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow$ **Convexe** sur $\mathbb{R}$

Point d'Inflexion

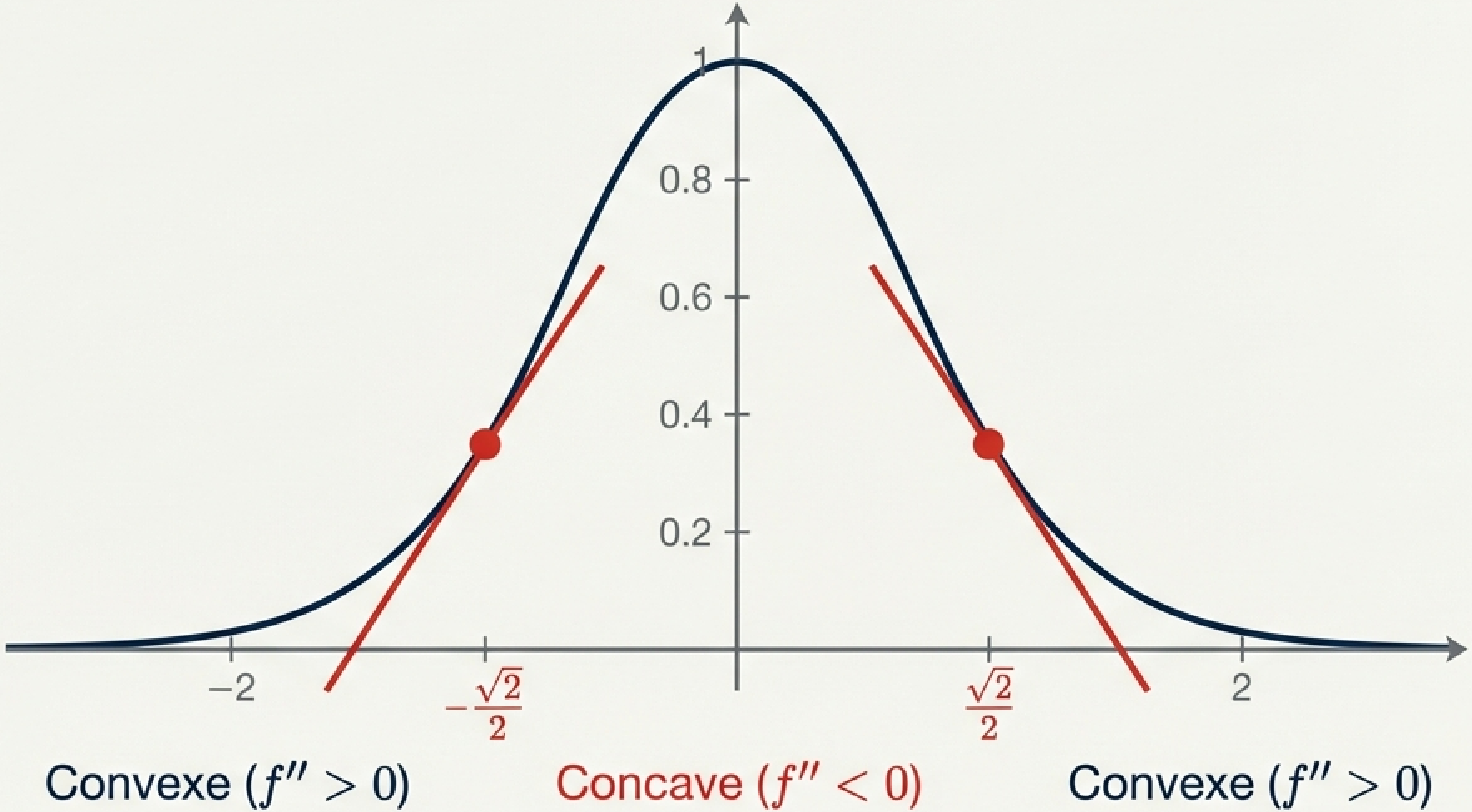
Point où la courbe traverse sa tangente (f'' s'annule en changeant de signe).
Crimson Pro.

Calcul :

$$f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

Racines :

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Extrema Locaux et Dérivée

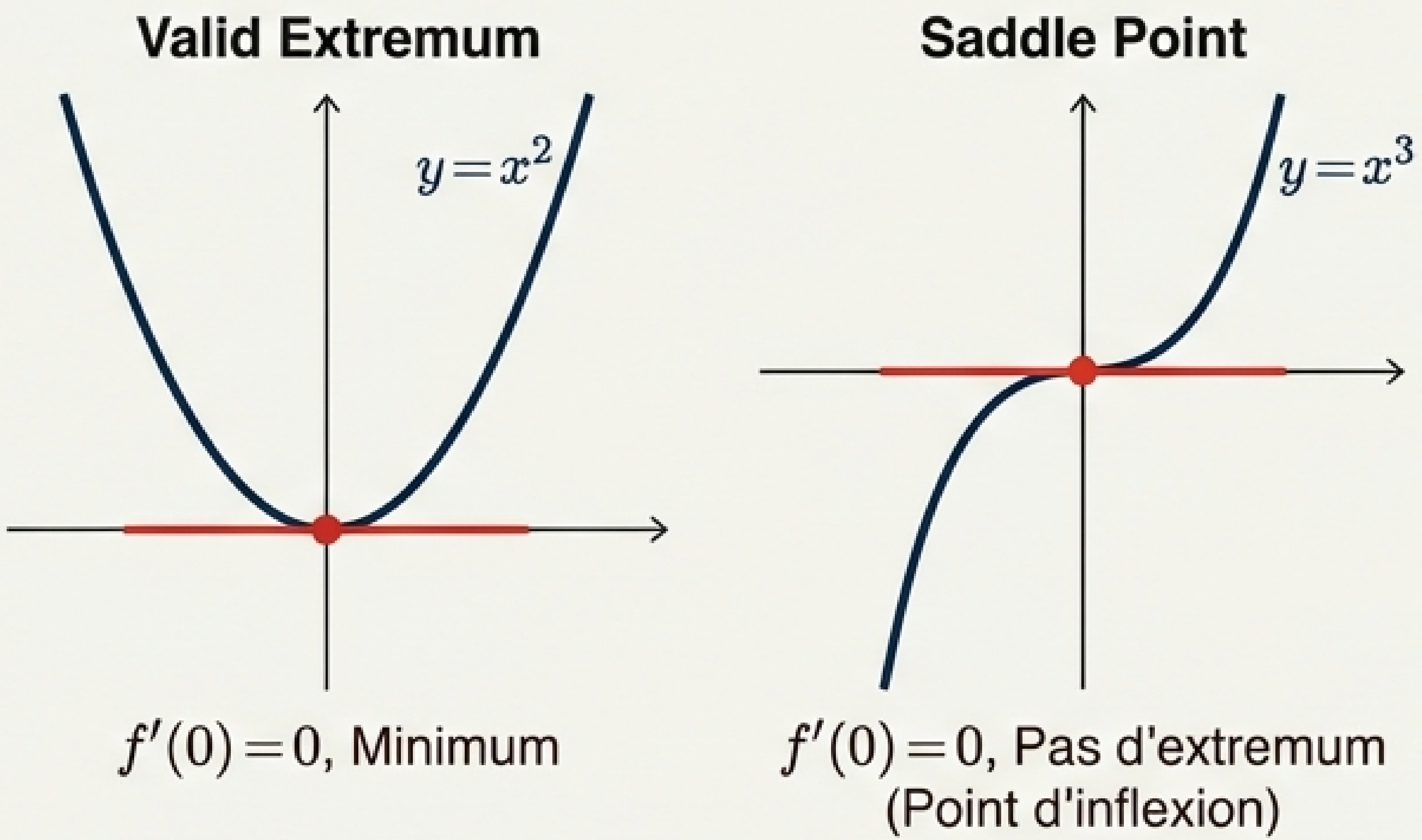
Condition Nécessaire (Théorème de Fermat)

Si f admet un extremum local en a et est dérivable en a, alors :

$$f'(a) = 0$$

Helvetica Now Display

Attention : $f'(a)=0$ n'est pas suffisant.

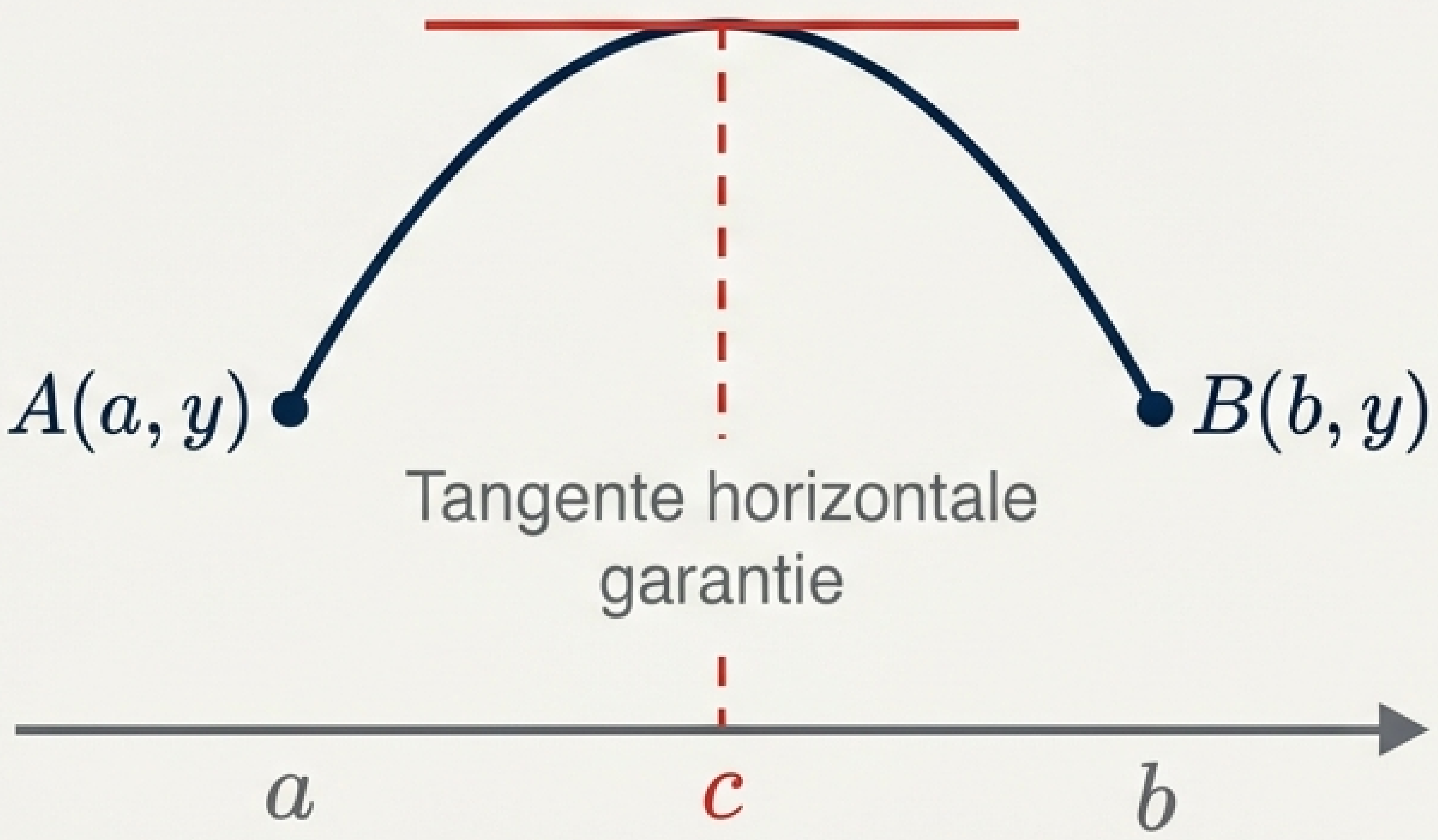


Pour avoir un extremum, la dérivée doit s'annuler <u>**et**</u> changer de signe.

Théorème de Rolle

Hypothèses :

1. f continue sur $[a, b]$
2. f dérivable sur $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$



Conclusion :

Il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = 0$$

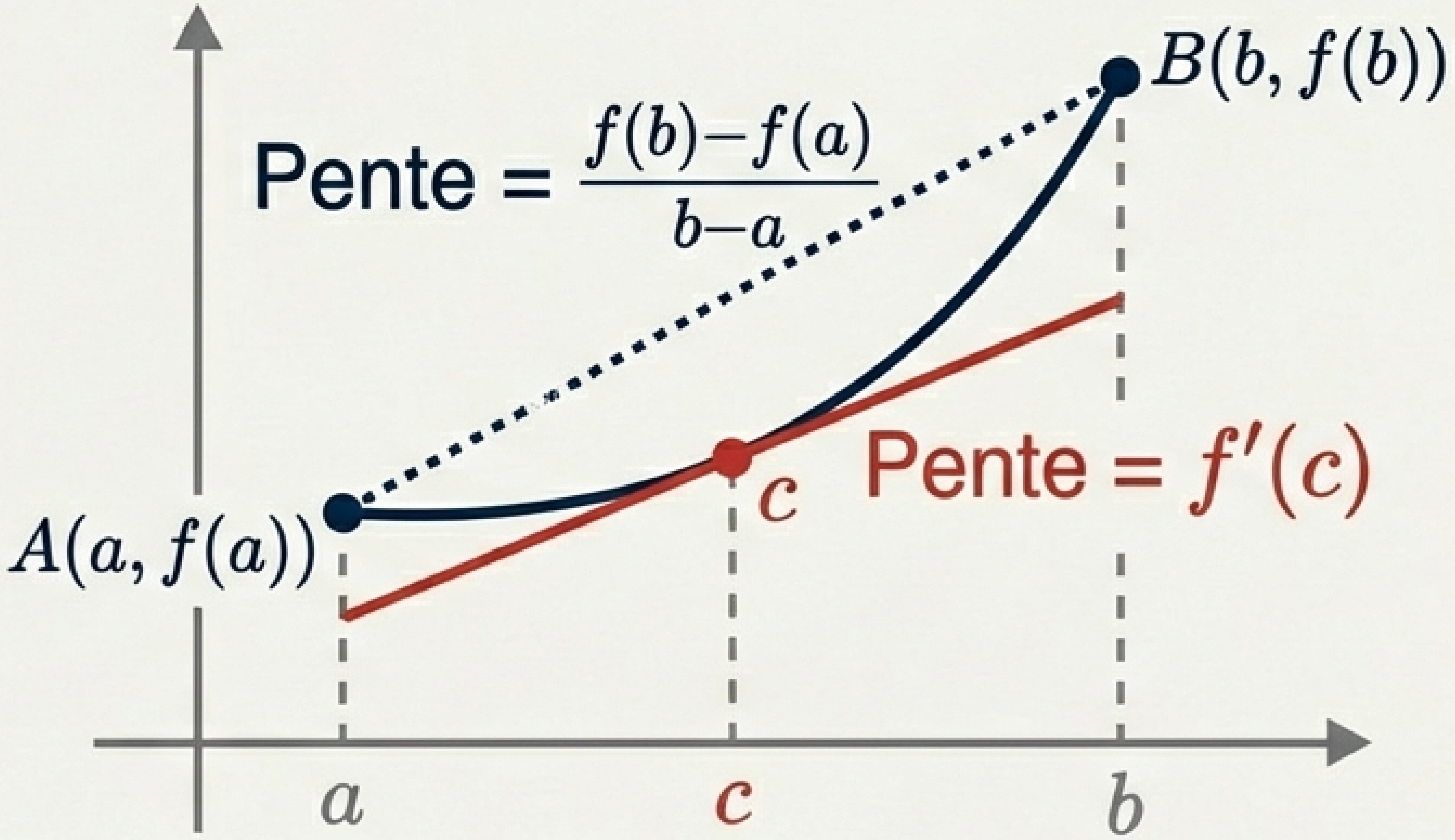
Théorème des Accroissements Finis (TAF)

Généralisation du Théorème de Rolle

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que :
La fonction $[AB] \neq f(a)$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Vitesse instantanée en c =
Vitesse moyenne sur $[a, b]$.



Application : Le Principe de Lagrange

Preuve rigoureuse du sens de variation.

Le Mécanisme de Preuve

D'après le TAF, pour tous $a < b$:

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$$

Si $f' \geq 0$	**Si $f' \leq 0$**	**Si $f' = 0$**
Alors $f'(c) \geq 0$	Alors $f'(c) \leq 0$	Alors $f'(c) = 0$
$\Rightarrow f(b) - f(a) \geq 0$	$\Rightarrow f(b) - f(a) \leq 0$	$\Rightarrow f(b) - f(a) = 0$
Fonction Croissante	**Fonction Décroissante**	**Fonction Constante**

Monotonie Stricte et Points Isolés

Peut-on avoir une croissance stricte si la dérivée s'annule ?

Si $f'(x) \geq 0$ et ne s'annule qu'en des **points isolés** (pas sur tout un intervalle), alors f est **strictement croissante.**

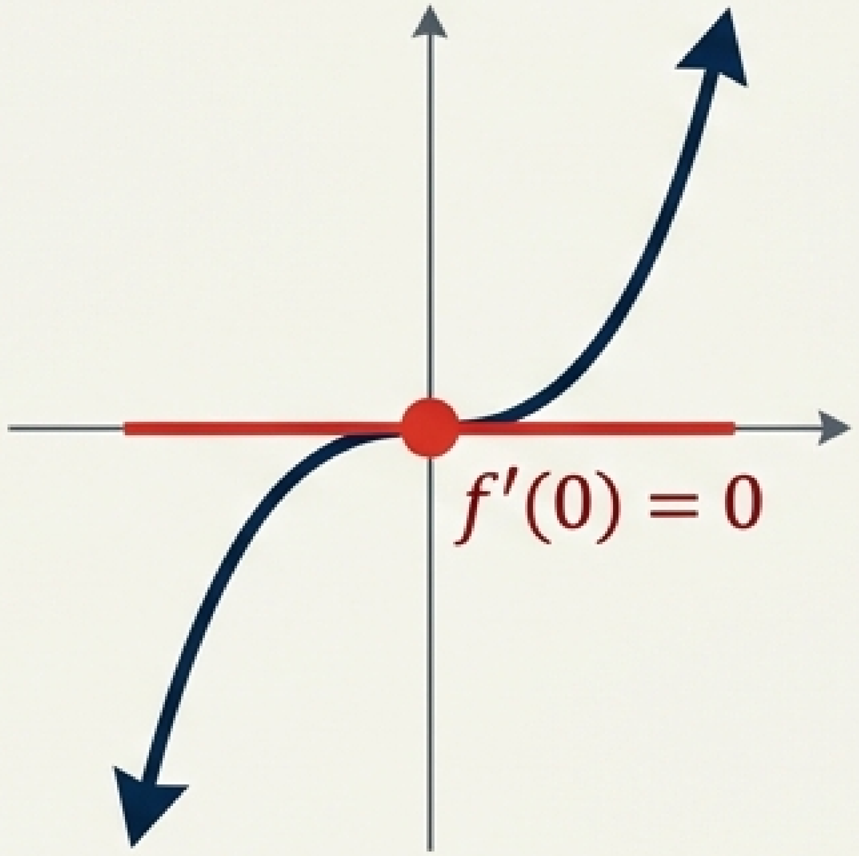
Exemple :

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$

$f'(0) = 0$ (Un seul point, donc isolé).

Conclusion : f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.



Tangente horizontale, mais pas de plateau.

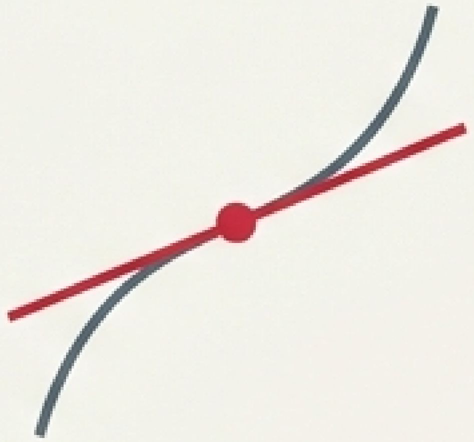
Synthèse : L’Arsenal Analytique

Mécanique

Calculer les taux de variation de systèmes complexes.

$(g \circ u)'$

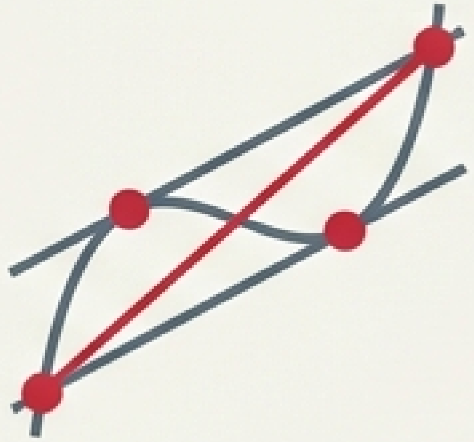
Géométrie



Comprendre la forme : courbure et inflexion.

f'' et **Convexité**

Théorie



Justifier rigoureusement les variations globales.

TAF

La dérivée n’est pas seulement un outil de calcul local ; c’est le lien fondamental entre l’instant (f') et la durée (f).