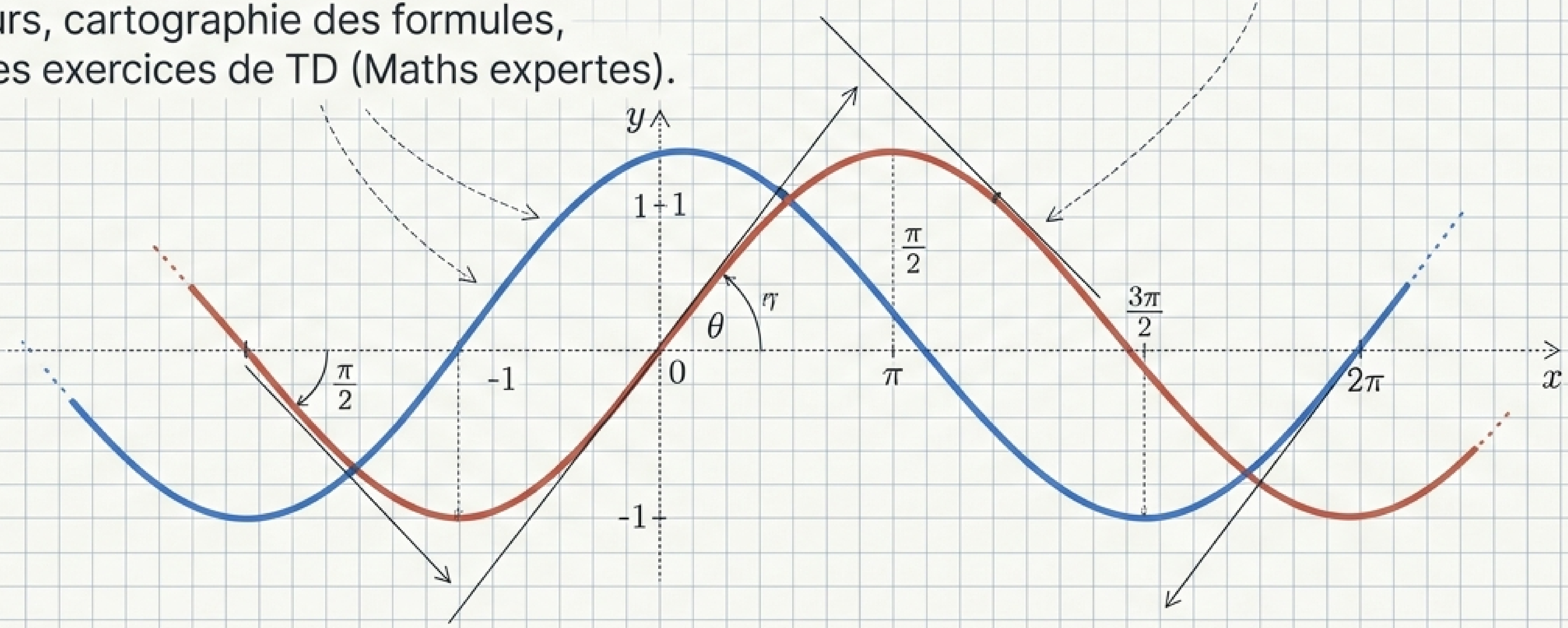
RÉVISION INTENSIVE — CHAPITRE 13

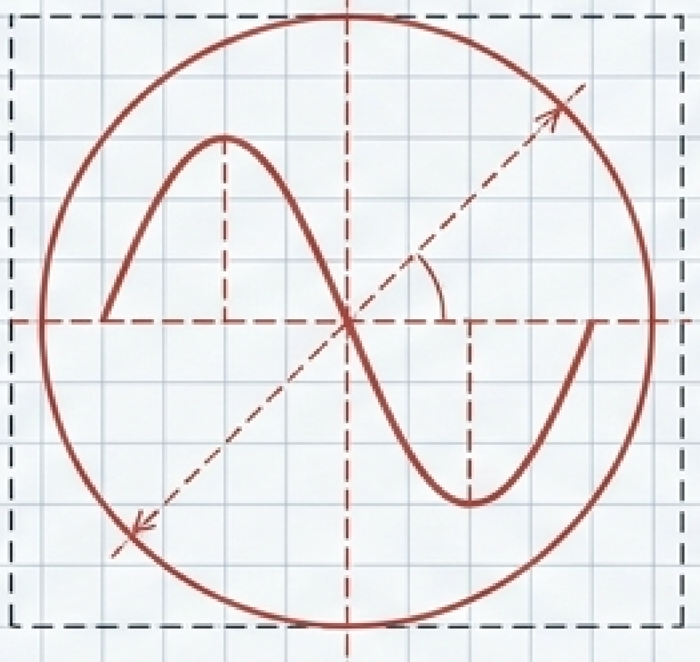
Fonctions Trigonométriques : De la Théorie à la Maîtrise

Synthèse de cours, cartographie des formules, et décryptage des exercices de TD (Maths expertes).



L'Architecture du Chapitre

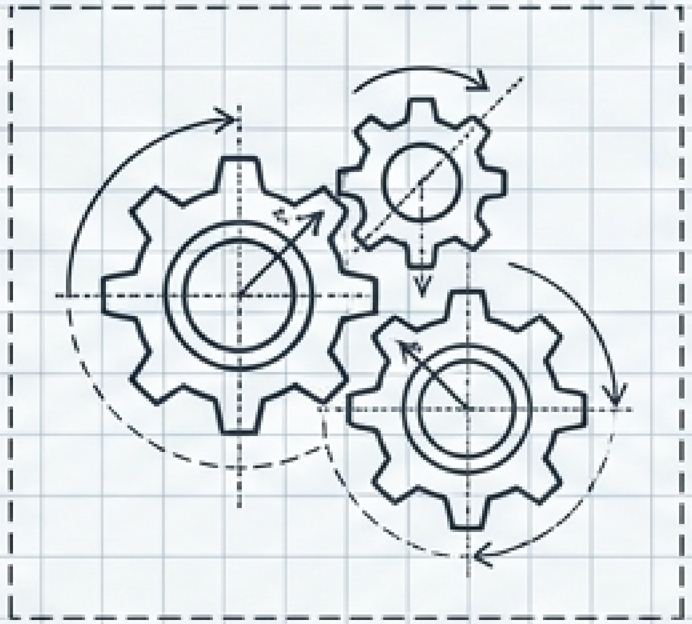
Foundation



1. L'Espace Qualitatif

Parité, Périodicité, Courbes

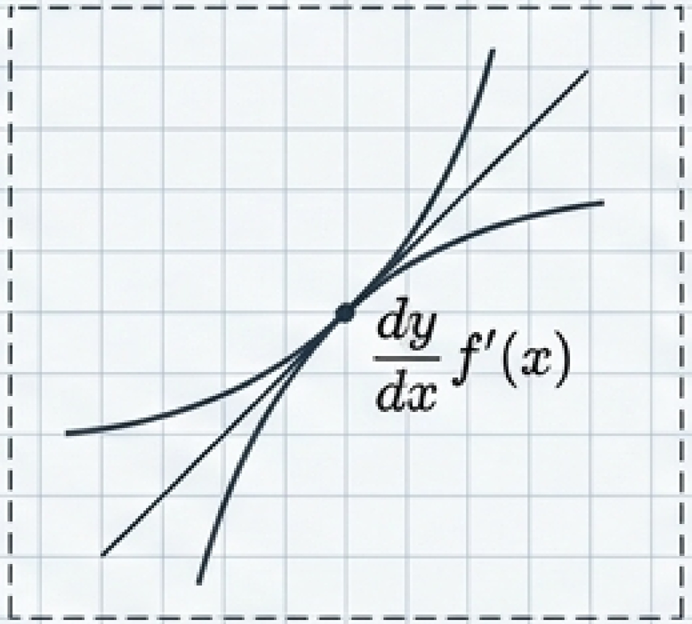
Structure



2. La Boîte à Outils Algébrique

Formules d'addition et de duplication

Engine

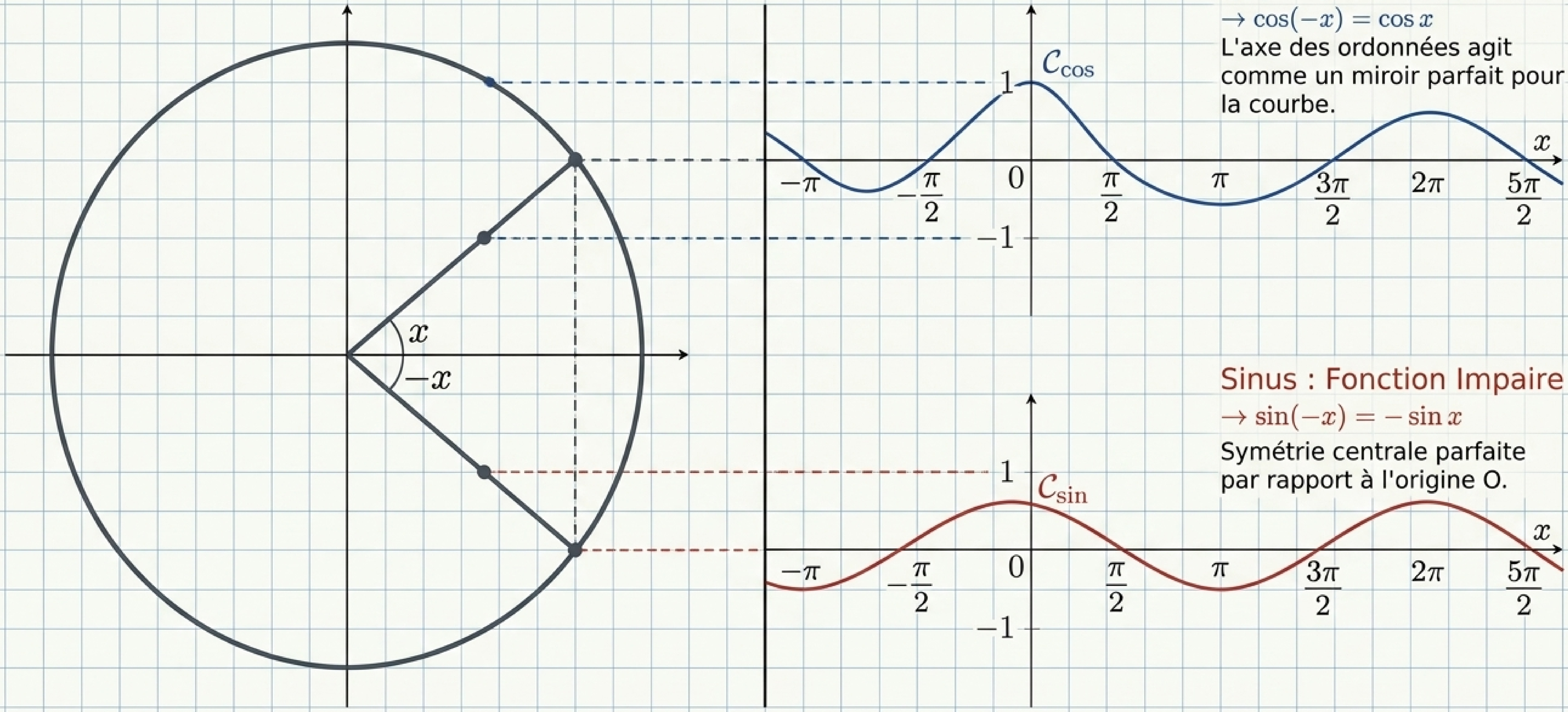


3. Le Moteur Analytique

Dérivation, Tangentes
Optimi

Actuce : Chaque section théorique est immédiatement suivie d'une 'Masterclass' décryptant les méthodes clés des exercices de TD.

Symétries & Parité : Lire le Cercle



Cosinus : Fonction Paire

$\rightarrow \cos(-x) = \cos x$

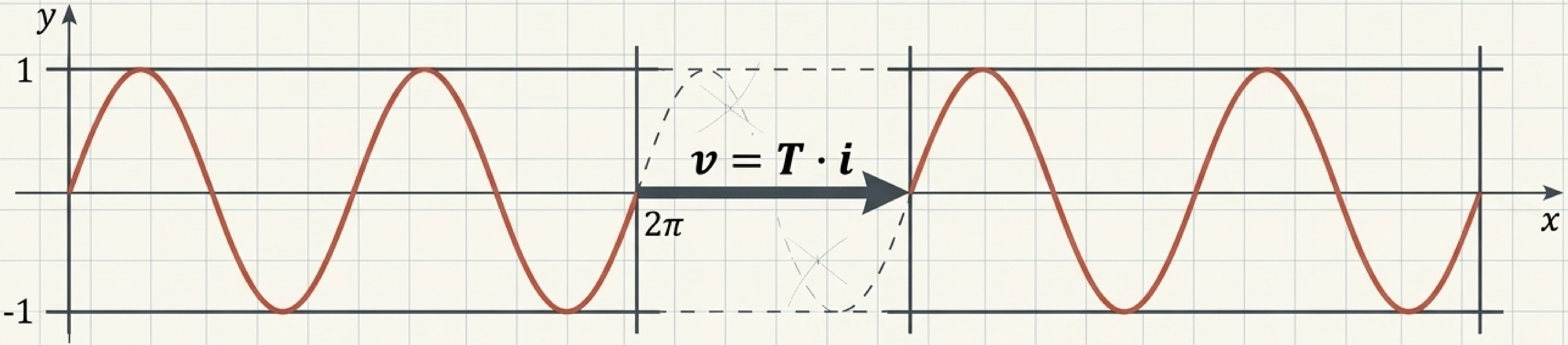
L'axe des ordonnées agit comme un miroir parfait pour la courbe.

Sinus : Fonction Impaire

$\rightarrow \sin(-x) = -\sin x$

Symétrie centrale parfaite par rapport à l'origine O.

Fonctions T-périodiques : L'Invariance par Translation



Définition :

$$f(x+T) = f(x)$$ → La courbe est globalement invariante par la translation de vecteur $T \cdot i$.

Le Réflexe de Calcul :

Pour le sinus et le cosinus de base, la période est $T = 2\pi$.

Mais attention ! Si le temps est accéléré d'un facteur ω, pour $\cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$, la période est compressée :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

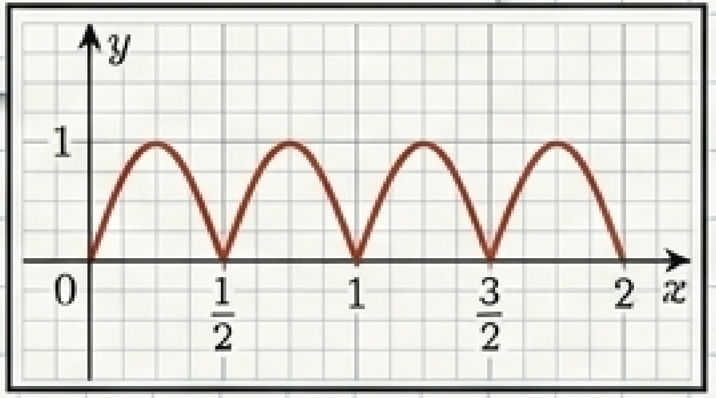
Application TD : Identifier et Prouver la Période

Panel 1: Le Sinus Redressé (TD Ex 1)

- **Fonction:** $f(t) = |\sin(\pi t)|$
- **Stratégie:** Montrer que f est 1-périodique.

Preuve :

$$\begin{aligned} f(t+1) &= |\sin(\pi(t+1))| \\ &= |\sin(\pi t + \pi)| \\ &= |-\sin(\pi t)| \\ &= |\sin(\pi t)| = f(t) \end{aligned}$$



Panel 2: Changement d'échelle (TD Ex 2 & 7)

- **Fonction:** $g(x) = a\cos(ax) + a$
- **Identification:** Le coefficient devant x (la pulsation) est a.

- **Conclusion immédiate:** La période est $T = 2\pi/a$

(Test de vérification :

$$\begin{aligned} g\left(x + \frac{2\pi}{a}\right) &= a\cos\left(a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right)\right) + a \\ &= a\cos(ax + 2\pi) + a \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Formules d'Addition : L'Arsenal Algébrique

	Cosinus	Sinus
Somme (a+b)	$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
Différence (a-b)	$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Astuce Mnémotechnique

- Cosinus est égoïste et contrariant : Il groupe les 'cos' ensemble d'abord, et inverse toujours le signe.
- Sinus est sympa et fidèle : Il mélange 'sin' et 'cos' équitablement, et garde le même signe.

Naviguer entre les dimensions : Duplication & Linéarisation

Angle Double (Duplication)

→ $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

→ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

(aussi $2\cos^2 x - 1$ ou $1 - 2\sin^2 x$)

Linéarisation (Dégression de puissance)

Passage au degré 1 (Linéarisation)

Indispensable pour calculer des intégrales ou des primitives.

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Expression Rationnelle (TD Ex 9)

En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Application TD : Manipuler les Formules (Tactiques de Résolution)

Tactique 1 : Valeurs Exactes (TD Ex 4)

- **Mission** : Trouver $\tan(\frac{5\pi}{12})$.
- **Action** : Décomposer en angles connus.

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$$

- **Outil** : Utiliser la formule

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Tactique 2 : Produit → Somme (TD Ex 5)

- **Outil** :

$$2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

Preuve : Il suffit d'additionner les lignes des deux formules d'addition du sinus !

Tactique 3 : Linéariser (TD Ex 13.7)

- **Mission** : Exprimer $\cos(3x)$.
- **Action** : Séparer en $\cos(2x + x)$. Développer puis remplacer $\cos(2x)$ et $\sin^2(x)$.
- **Résultat** :

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

NotebookLM

Le Secret des Physiciens : La Superposition (TD Ex 8)

Le Problème : Comment simplifier une combinaison $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ en un seul signal ?

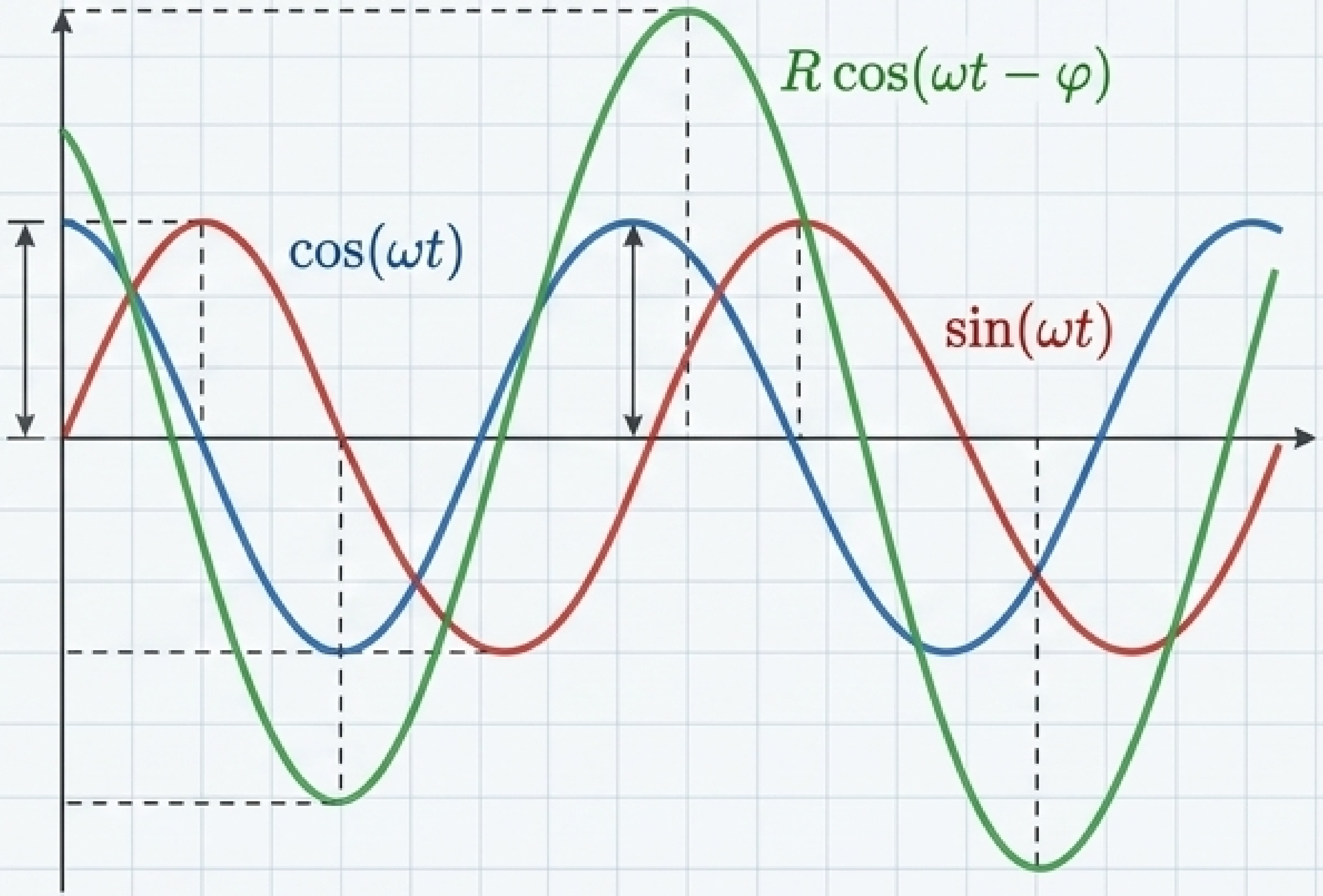
Le Théorème : Le signal fusionne en $\sqrt{a^2+b^2}\cos(\omega t - \varphi)$

Méthodologie en 3 Étapes :

1 **1. Factoriser par l'amplitude :**
Sortir le facteur global $R = \sqrt{a^2+b^2}$.

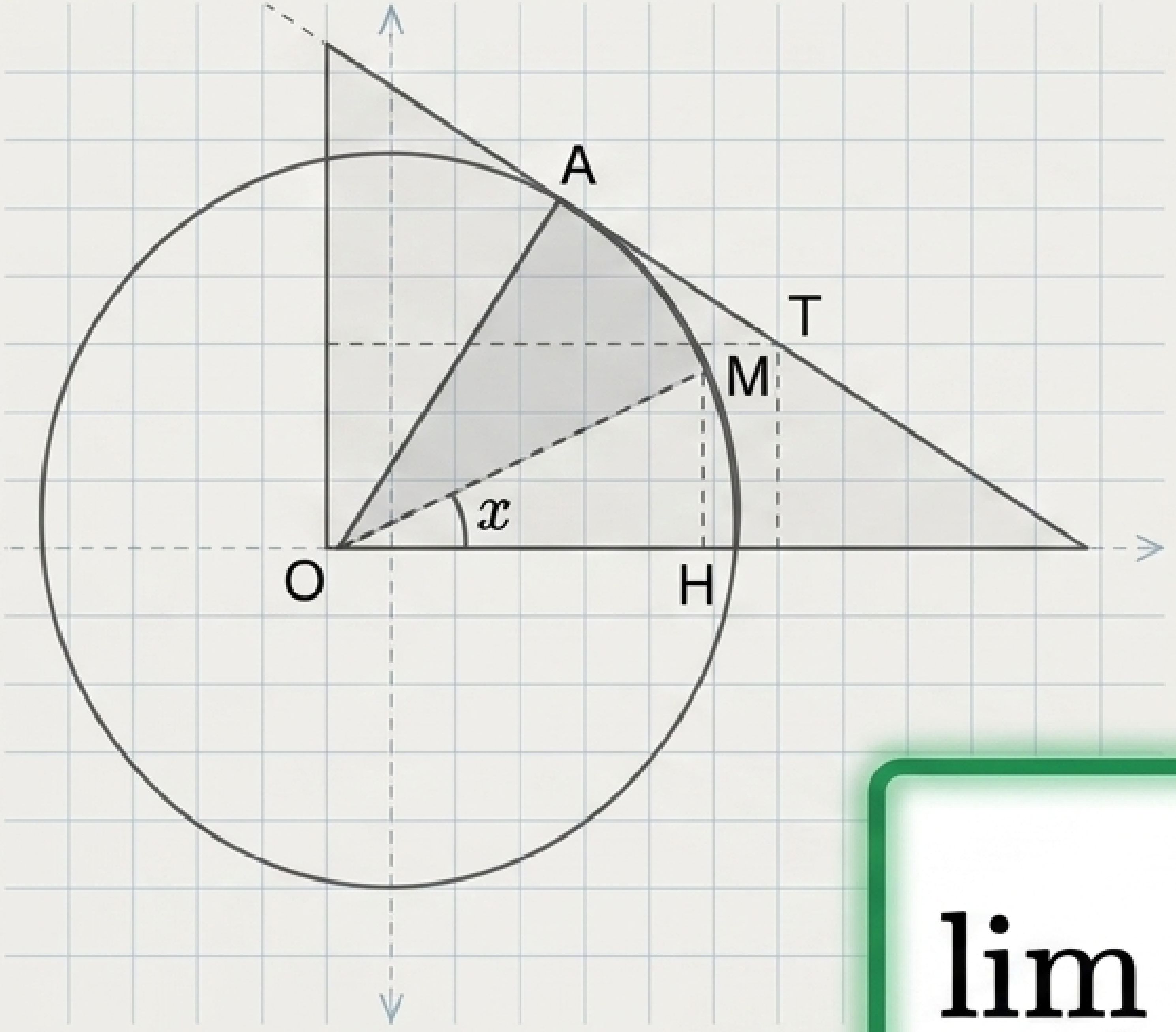
2 **2. Identifier l'angle de déphasage φ :**
On obtient $R\left[\frac{a}{R}\cos(\omega t) + \frac{b}{R}\sin(\omega t)\right]$.
On pose $\cos\varphi = \frac{a}{R}$ et $\sin\varphi = \frac{b}{R}$.

3 **3. Condenser :**
Appliquer la formule d'addition inversée :
$R\left[\cos\varphi\cos(\omega t) + \sin\varphi\sin(\omega t)\right] \to R\cos(\omega t - \varphi)$.



Exemple (Cours) : $\cos(\omega t) + \sin(\omega t) = \sqrt{2}\cos(\omega t - \pi/4)$.

L'Origine de la Dérivation : Le Théorème des Gendarmes



La Preuve Géométrique :

Les aires de trois domaines s'emboîtent parfaitement.

$$\text{Aire}(OAM) < \text{Aire}(\text{Secteur } OAM) < \text{Aire}(OAT)$$

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$$

L'Inversion :

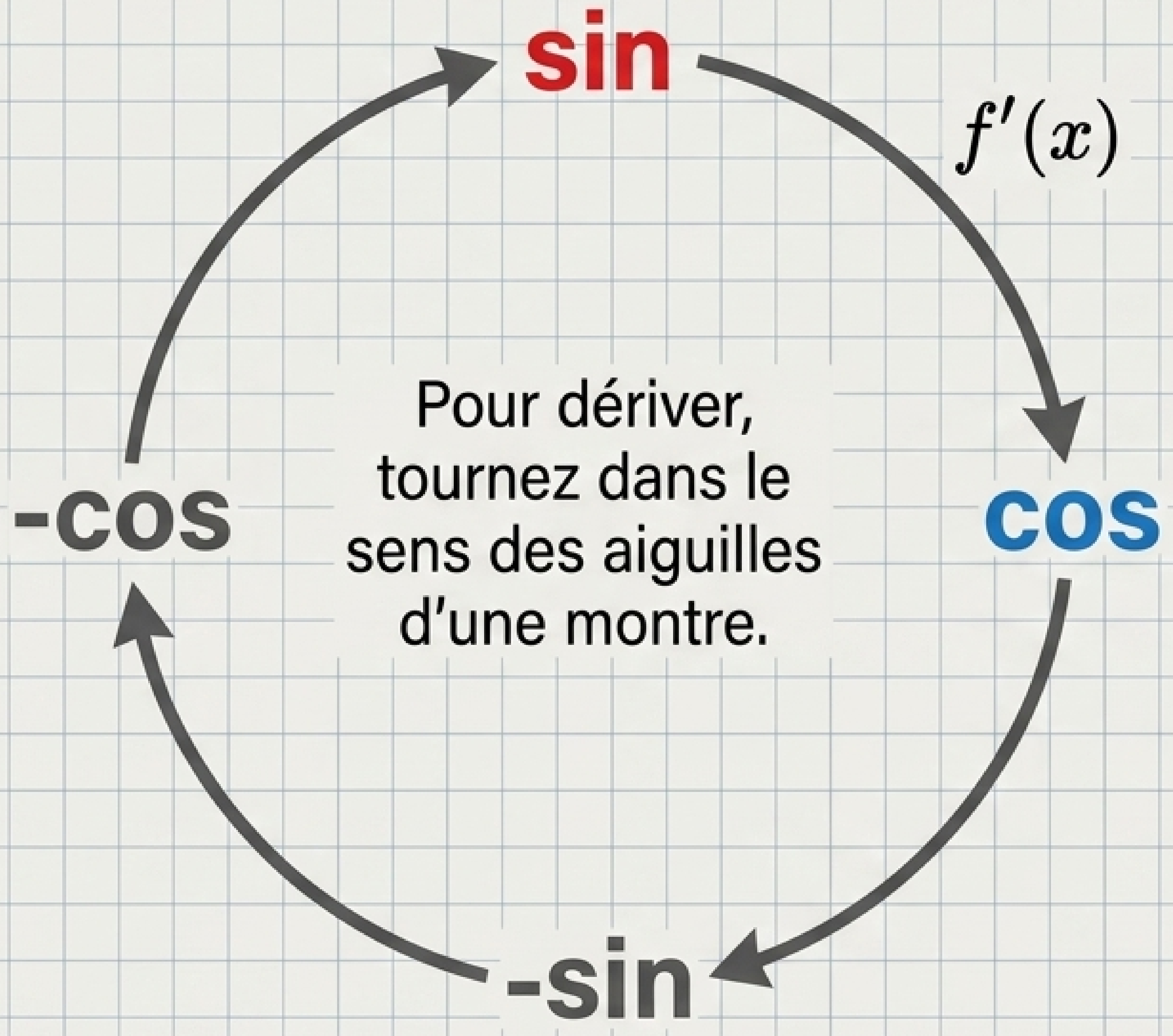
En divisant par $\sin x$ et en passant à la limite en 0, l'étau se resserre.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

La Limite Fondamentale

Impact : C'est cette limite unique (le taux d'accroissement en 0) qui prouve que la dérivée de sin(x) est cos(x).

Dérivées : Le Cycle Perpétuel & Les Composées



Fonction Tangente :

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

(Domaine : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$)

Le Piège Classique :
Les Fonctions Composées !

N'oubliez jamais de 'sortir' le coefficient 'a' lors de la dérivation.

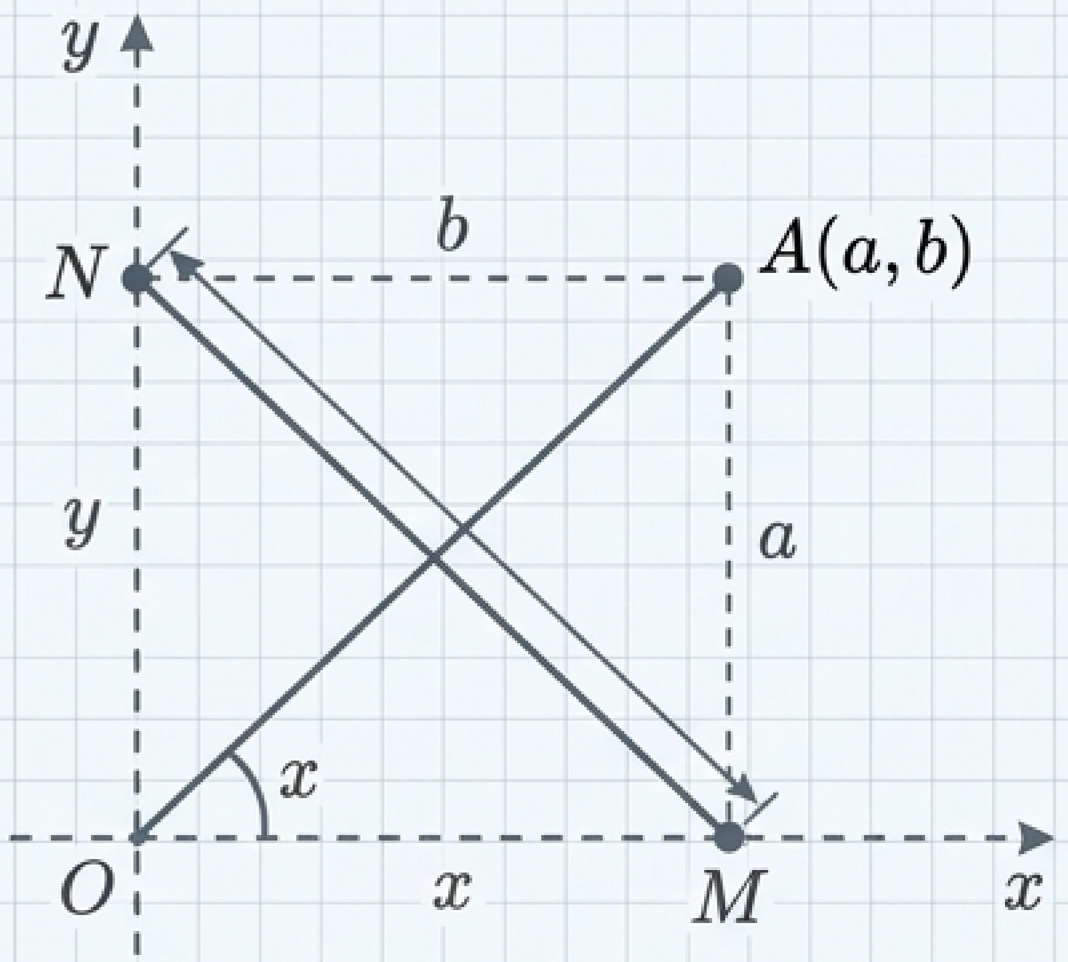
$$f(ax+b) \to a \cdot f'(ax+b)$$

Exemple :

$$\sin'\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \mathbf{3} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

L'Exo Ultime du TD : Optimisation d'une Distance

Configuration Géométrique



On cherche la distance minimum $d(x) = MN = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x}$ pour un angle $x \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$.

Séquence de Résolution Algébrique

Étape 1 : Dériver (L'outil)

$$d'(x) = \frac{a\sin^3 x - b\cos^3 x}{\cos^2 x \sin^2 x}.$$

Étape 2 : Chercher l'annulation (Le point critique)

La dérivée s'annule si le numérateur est nul :

$$a\sin^3 x = b\cos^3 x$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = \frac{b}{a}$$
$$\Leftrightarrow \tan^3 x = \frac{b}{a}$$

La Conclusion :

Le point optimal de distance minimale x_0 vérifie toujours :

$$\tan x_0 = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

L'Antisèche du Chapitre 13 (À mémoriser)

Qualitatif (Le Cercle)

- Période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- Parité : $\cos(-x) = \cos x$ (Pair)
- Parité : $\sin(-x) = -\sin x$ (Impair)

Analytique (Le Cycle)

- $\sin' = \cos$
- $\cos' = -\sin$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Algébrique (La Matrice)

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

Fin de l’Atelier : Maîtrise du Chapitre 13

Checklist de Validation

- [ ] Je sais lire les symétries et la parité directement sur le cercle trigonométrique.
- [ ] Je connais mes formules d’addition et je sais linéariser un cosinus au carré.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

- [ ] Je sais dériver une fonction composée sans oublier le coefficient. $\frac{d}{dx}(\sin(3x)) = 3\cos(3x)$
- [ ] Je peux superposer deux signaux de même pulsation (*Astuce* $\sqrt{a^2+b^2}$). → *Astuce* $\sqrt{a^2+b^2}$

Plan d’Action Immédiat :
Refaire les exercices de TD 1, 4, 8 et le problème d’optimisation (distance MN) à l’aveugle.