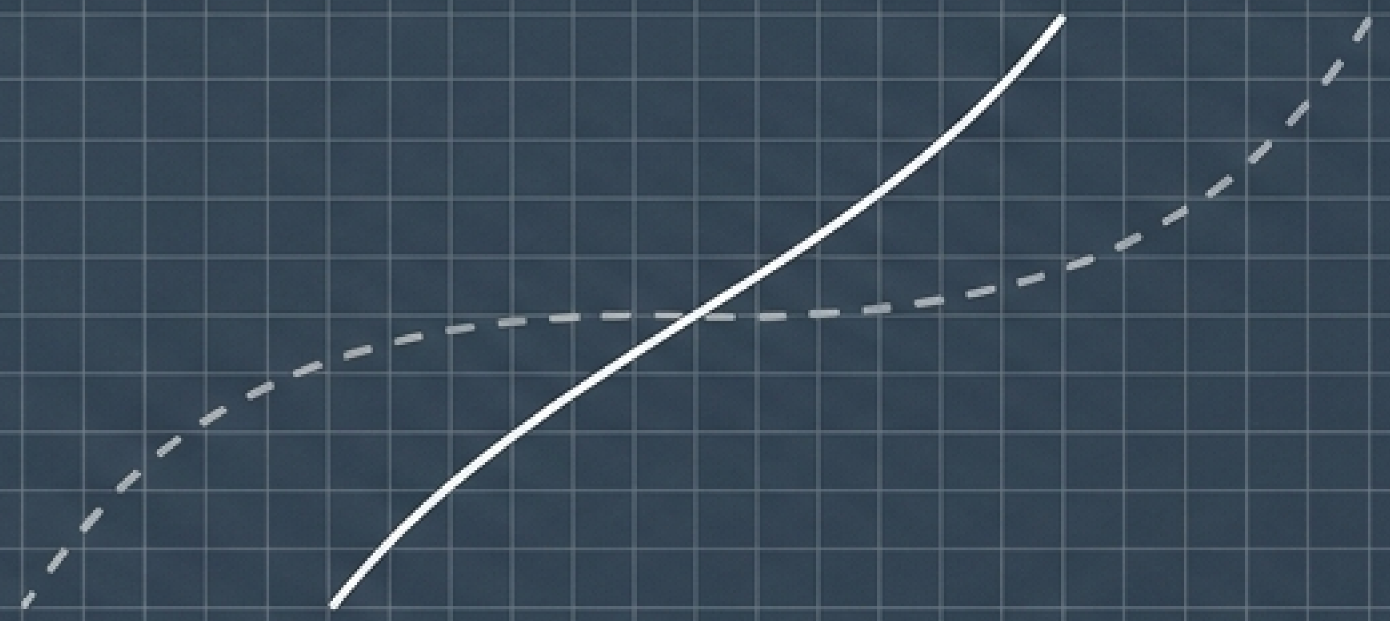
Chapitre 14 : Primitives & Équations Différentielles

Modèles continus d'évolution spatiale et temporelle



Définition : Primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Exemple : Mouvement

La vitesse $v(t)$ est la dérivée de la position $x(t)$. Donc, la position est une primitive de la vitesse : $x(t) = \int v(t)dt$.

Preuve : Théorème Fondamental

Soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors $F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$.

La Fondation : Définition et Existence d'une Primitive

Définition 14.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une fonction F est une *primitive* de f sur I si, et seulement si,

— F est dérivable sur I,

— $\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$.

Proposition 14.1

Si f est continue sur un intervalle I, alors cette fonction admet sur I des primitives. (Démonstration au chapitre 15).

Note : La réciproque est fausse. L'équation $y' = f(x)$ est la forme la plus simple d'équation différentielle.

Exemple 14.1

Une primitive de la fonction $f : x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F : x \longmapsto \frac{x^3}{3}$.

Nous remarquons dès à présent que $G : x \longmapsto \frac{x^3}{3} + 3$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

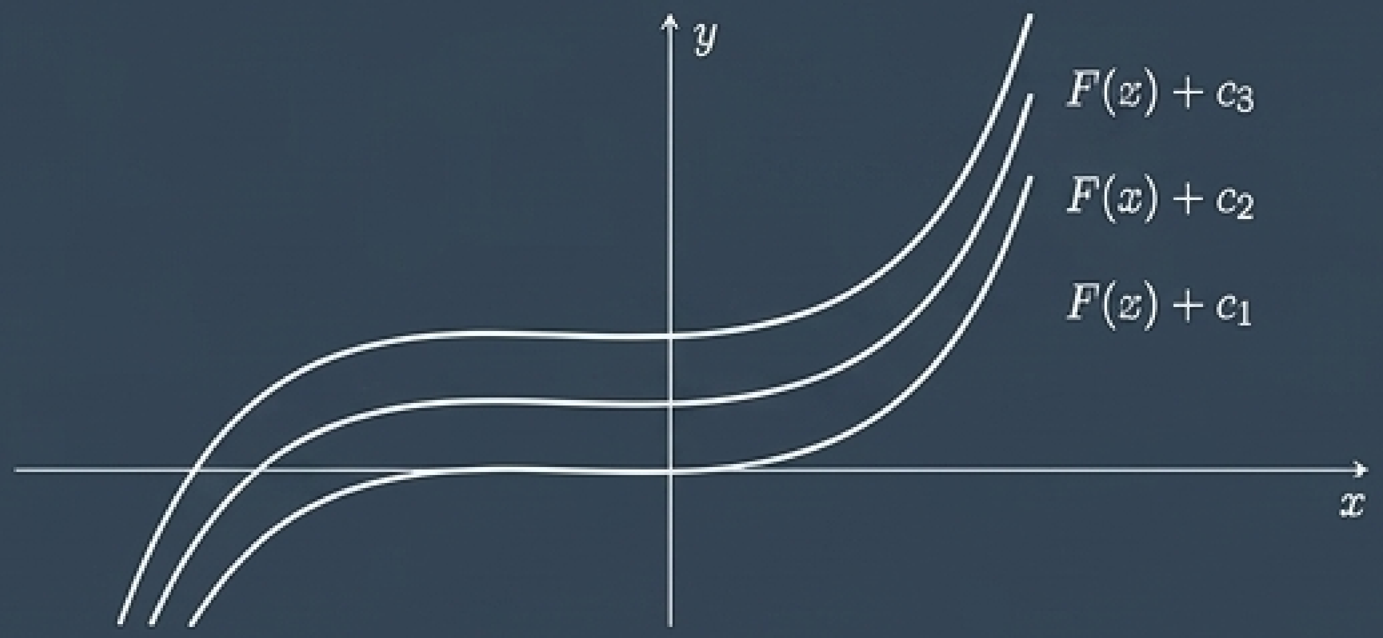
Exemple 14.2

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \underset{\text{Dérivation}}{\overset{\text{Intégration}}{\rightleftarrows}} \quad F(x) = \ln(x) \text{ sur }]0, +\infty[$$

Exemple 14.3

$$f(x) = \sin(x) \quad \underset{\text{Dérivation}}{\overset{\text{Intégration}}{\rightleftarrows}} \quad F(x) = -\cos(x) \text{ sur } \mathbb{R}$$

L'Infinité des Primitives : Le Rôle de la Constante + c



Égales à une constante additive près.

Cette propriété signifie que si une fonction f admet une primitive sur un intervalle I, alors cette fonction admet une infinité de primitives sur I qui sont égales à une constante additive près.

Proposition 14.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la fonction G est une primitive de f sur I,

(ii) il existe un réel c tel que, quel que soit le réel x, $G(x) = F(x) + c$.

Amber

- Exemple 1 : $f(x) = e^x + x \to F(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + c$
- Exemple 2 : $y' = \frac{1}{x^2} \to f(x) = -\frac{1}{x} + c$ sur $]0, +\infty[$

Démonstration

$\boxed{(i) \Longrightarrow (ii)}$

Si G est une primitive de f sur I alors G est dérivable sur I et nous avons

$$\forall x \in I, \quad G'(x) = f(x).$$

Puisque F est aussi une primitive de f sur I, pour tout réel x, nous en déduisons

$$G'(x) = F'(x),$$

$$G'(x) - F'(x) = 0, \text{ soit } (G - F)'(x) = 0.$$

ce qui implique

$$G'(x) - F'(x) = 0, \text{ soit } (G - F)'(x) = 0.$$

Par suite, comme nous savons qu'une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante, il existe un réel c tel que, quel que soit le réel x,

$$(G - F)(x) = c, \quad \text{c'est-à-dire } G(x) - F(x) = c.$$

Nous en concluons :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = F(x) + c.$$

$\boxed{(ii) \Longrightarrow (i)}$

G est dérivable sur I comme somme de deux fonctions dérivables sur I. Ainsi, pour tout réel x, nous obtenons

$$G'(x) = F'(x) = f(x),$$

ce qui justifie que G est une primitive de f sur I.

Ancrer la Courbe : Conditions Initiales et Opérations

Proposition 14.3 – Condition initiale

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, $a \in I$ et b un réel. Il existe une unique primitive G de f sur I satisfaisant à $G(a) = b$.

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I. L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G tel que

$$\forall x \in I,\ \ G(x) = F(x) + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale $G(a) = b$ implique $F(a) + c = b$, soit $c = b - F(a)$. Cette valeur fixée du réel c assure que la fonction $G : x \mapsto F(x) + b - F(a)$ est l'unique primitive de f sur I satisfaisant à la condition initiale $G(a) = b$.

Exemple 14.6

Nous explicitons la primitive F sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} + 3$ qui satisfait à $F(1) = 2$. Les primitives de f sont définies sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto \ln x + 3x + c$, avec $c \in \mathbb{R}$. La condition initiale $F(1) = 2$ induit $2 = \ln 1 + 3 + c$, ce qui donne $c = -1$. Nous en concluons $\forall x \in]0, +\infty[,\ F(x) = \ln x + 3x - 1$.

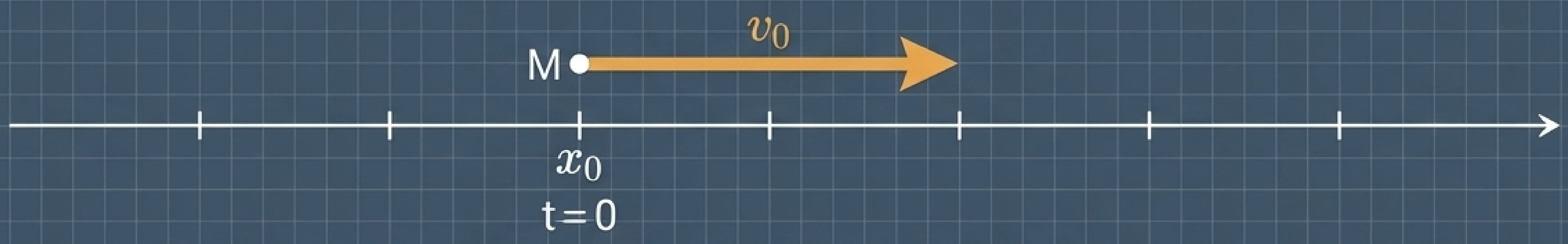
Opérations sur les Primitives

Somme : $F+G$ est primitive de $f+g$.

Scalaire : $k{\cdot}F$ est primitive de $k{\cdot}f$.

(Justification : $(F+G)' = F'+G'$ et $(kF)' = kF'$)

Manifestation Physique : La Cinématique du Mouvement



Exemple 14.7

1. **Le Modèle :** Mouvement uniforme à vitesse constante v_0. Position initiale x_0.
2. **L'Équation Différentielle :** La vitesse est la dérivée de la position $\rightarrow x'(t) = v_0$.
3. **La Primitive :** L'intégration donne la position générale $\rightarrow x(t) = v_0 t + c$.
4. **La Condition Initiale :** À $t=0$, $x(0) = x_0 \rightarrow v_0(0) + c = x_0 \rightarrow c = x_0$.
5. La **Loi de Mouvement :** $x(t) = v_0 t + x_0$ (pour $t \geq 0$).

Le Tableau de Bord Analytique : Primitives Usuelles

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Intervalle I
Puissances		
0	c	$\mathbb{R}$
a	$ax + c$	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	dépend de n
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x) + c$	$]0, +\infty[$
Transcendantes		
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c$	$\cos x \neq 0$

Notes Avancées sur les Polynômes

Plus généralement, dans la 5e ligne du tableau, nous pouvons remplacer l'exposant $n \in \mathbb{Z} \cup \{-1/\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ par un exposant réel $\alpha \neq -1$.
Ainsi, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, une primitive de $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$.
Par somme et multiplication par un réel, une primitive sur $\mathbb{R}$ d'un trinôme du second degré, $x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ est la fonction

$$x \mapsto a \cdot \frac{x^3}{3} + b \cdot \frac{x^2}{2} + cx + d.$$

Plus généralement, une primitive sur $\mathbb{R}$ d'un polynôme de degré n,

$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, avec $a_n \neq 0$, est le polynôme

de degré $n+1$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$.

Mécanique Avancée : Primitives et Composition

Proposition 14.5

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa dérivée u' soit continue sur I. Soit g une fonction continue sur un intervalle J et G une primitive de g sur cet intervalle. Nous supposons $\forall x \in I, u(x) \in J$.
Le réel λ étant donné, la fonction $f : x \longmapsto \lambda u'(x)(g \circ u)(x)$ admet pour primitives sur l'intervalle I, les fonctions F définies par $F(x) = \lambda(G \circ u)(x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Démonstration

La fonction F est dérivable sur I par composition.
Pour tout réel $x \in I$, nous obtenons

$$F'(x) = \lambda u'(x)(G' \circ u)(x) = \lambda u'(x)(g \circ u)(x).$$

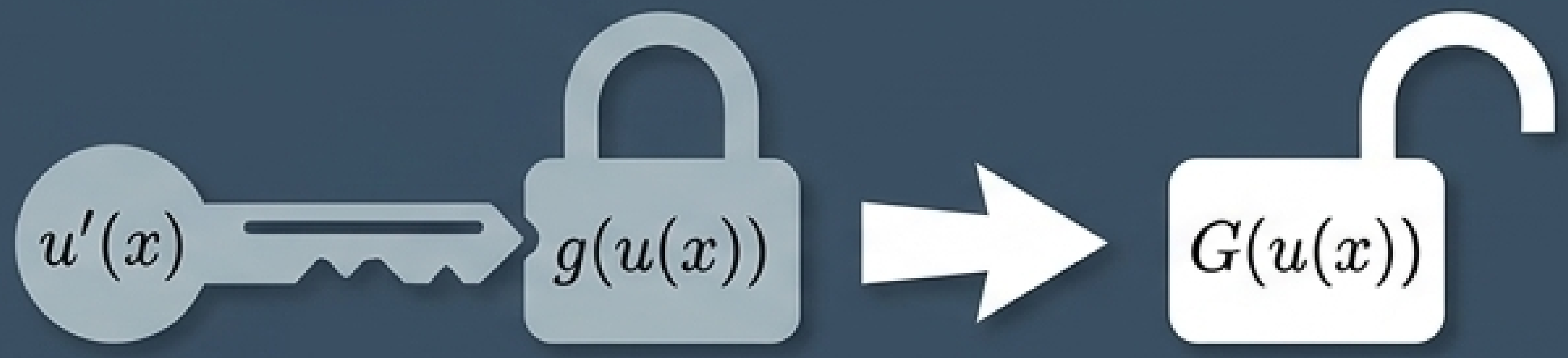


Tableau des Composées

1	$\lambda\, u'\, u^{\alpha}$	$\rightarrow$	$\dfrac{\lambda\, u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\text{si } \alpha \neq -1)$
2	$\lambda \dfrac{u'}{u}$	$\rightarrow$	$\lambda \ln(\lvert u \rvert) + c \quad (\text{si } u \neq 0)$
3	$\lambda\, u'\, e^{u}$	$\rightarrow$	$\lambda\, e^{u} + c$
4	$\lambda\, u' \cos(u)$	$\rightarrow$	$\lambda \sin(u) + c$
5	$\lambda\, u' \sin(u)$	$\rightarrow$	$-\lambda \cos(u) + c$

Règle affine

Dans le cas particulier où $u(x) = ax + b$, avec a réel non nul et b réel et dans les conditions de la pr-roposition avec $\lambda = 1$, la fonction $f : x \mapsto g(ax+b)$ admet pour primitives sur l'intervalle I, les fonctions F définies par

$$F : x \longmapsto \frac{1}{a} G(ax+b).$$

La Composition en Pratique : Extraction et Identification

Exemple 14.8

Nous déterminons les primitives F sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f : x \mapsto 2x\left(x^2+1\right)^4.$$

En posant $u(x) = x^2 + 1$, il vient : $u'(x) = 2x$, ce qui donne

$$f(x) = u'(x)u^4(x).$$

En appliquant la deuxième ligne du tableau pour $\alpha = 4$ et $\lambda = 1$, pour tout réel x, nous obtenons

$$F(x) = \frac{u^5(x)}{5} + c, \text{ soit } F(x) = \frac{(x^2+1)^5}{5} + c.$$

Exemple 14.9

Nous déterminons les primitives F sur $]1, +\infty[$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{(x^2-1)^3}.$$

En posant $u(x) = x^2 - 1$, il vient : $u'(x) = 2x$, ce qui donne

$$f(x) = \frac{1}{2}u'(x)u^{-3}(x).$$

En appliquant la deuxième ligne du tableau pour $\alpha = -3$ et $\lambda = \frac{1}{2}$, pour tout réel $x > 1$, nous obtenons :

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u^{-3+1}(x)}{-3+1} + c,$$

soit

$$F(x) = -\frac{1}{4(x^2-1)^2} + c.$$

Exemple 14.10

Nous déterminons les primitives F sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}.$$

En posant $u(x) = \cos x$, il vient : $u'(x) = -\sin x$, ce qui donne

$$f(x) = -u'(x)u^{-1/2}(x).$$

En appliquant à nouveau la deuxième ligne du tableau pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\lambda = -1$, pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, nous obtenons

$$F(x) = -2u^{1/2}(x) + c = -2\sqrt{\cos x} + c.$$

Exemple 14.11 :

$$f(x) = \frac{1}{ax+b}$$

$$\begin{array}{l} u = ax+b \\ u' = a \end{array} \rightarrow \frac{1}{a}\frac{u'}{u} \rightarrow$$

$$\rightarrow F(x) = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + c.$$

Exemple 14.12 :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\begin{array}{l} u = \frac{1}{x} \\ u' = -\frac{1}{x^2} \end{array} \rightarrow -u'e^u \rightarrow$$

$$\rightarrow F(x) = -\exp\left(\frac{1}{x}\right) + c.$$

La Transition : Les Équations Différentielles Linéaires

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ? Une équation où l'inconnue est une *fonction* $y = f(x)$, liant ses variations (y') à son état (y).

Proposition 14.6

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f_a : x \mapsto e^{ax}$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant à $y' = ay$ et $y(0) = 1$.

Démonstration : Existence et Unicité

Existence

▷ Existence d'une solution. La fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et, pour tout réel x, nous avons

$\downarrow$

$$f_a{}'(x) = ae^{ax} = a\, f_a(x) \text{ et } f_a(0) = 1$$

$\downarrow$

ce qui justifie que la fonction f_a satisfait $y' = ay$ et $y(0) = 1$.

Unicité

▷ Unicité. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant à $g' = ag$ et $g(0) = 1$. Puisque $e^{ax} > 0$, nous posons $h(x) = g(x)/e^{ax}$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient et, pour tout réel x, nous avons

$$h'(x) = \frac{g'(x)e^{ax} - ag(x)e^{ax}}{(e^{ax})^2} = \frac{e^{ax}(g'(x) - ag(x))}{e^{2ax}}.$$

⟶ Nous savons que pour tout réel x, $g'(x) - ag(x) = 0$. Il en résulte que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 0$.

⟶ Nous en déduisons que $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = c$.

⟶ En particulier, pour $x = 0$, nous obtenons $c = h(0) = g(0)/e^{a \times 0} = 1$,

⟶ ce qui justifie $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1$,

⟶ ce qui donne : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f_a(x)$. Nous en concluons que $g = f_a$.

La Règle Générale : Résolution de $y' = ay$

Proposition 14.7

Soit a un réel donné. Les deux propositions suivantes sont équivalentes.

(*i*) f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

(*ii*) f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ce^{ax}.$$

Démonstration

$(i) \implies (ii)$

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = af(x).$$

Pour tout réel x, posons $g(x) = e^{-ax}f(x)$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition et produit.
Sachant que $f'(x) - af(x) = 0$, nous obtenons

$$g'(x) = -ae^{-ax}f(x) + e^{-ax}f'(x) = e^{-ax}(f'(x) - af(x)) = 0.$$

Il en résulte que

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-ax}f(x) = c.$$

Nous en concluons :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ce^{ax}$$

$(ii) \implies (i)$

Si $f(x) = ce^{ax}$, alors $f'(x) = cae^{ax} = a(ce^{ax}) = af(x)$.

Méthode Alternative : Séparation des Variables

Résolution de $y' = ay$ par « séparation des variables ».

En remarquant que si $y \neq 0$, alors l'équation $y' = ay$ équivaut à $\frac{y'}{y} = a$, nous proposons une autre méthode (dite par séparation des variables) pour résoudre l'équation $y' = ay$.

Pour $y \neq 0$, en explicitant une primitive de chaque membre de l'égalité

$$\frac{y'}{y} = a,$$

nous obtenons que

$$\ln|y| = ax + b, \quad \text{avec } b \in \mathbb{R},$$

ce qui donne

$$|y| = e^{ax+b} = e^b e^{ax}.$$

Nous en déduisons que

$$y = -e^b e^{ax} \quad \text{ou} \quad y = e^b e^{ax}.$$

En posant $c = \pm e^b$, une solution non nulle de $y' = ay$ est la fonction

$$f : x \longmapsto ce^{ax}, \quad \text{avec } c \neq 0.$$

Si $c = 0$, alors la fonction nulle est aussi solution.
Ainsi nous avons prouvé à nouveau que $f : x \longmapsto ce^{ax}$, avec $c \in \mathbb{R}$, est une solution quelconque de $y' = ay$.

Cibler la Solution : $y' = ay$ avec Condition Initiale

Proposition 14.8

Soient a, x_0 et y_0 trois réels.
L'équation différentielle $y' = ay$ admet une unique solution f satisfaisant à la condition initiale $f(x_0) = y_0$.

Une solution quelconque de cette équation est la fonction $x \mapsto ce^{ax}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

$\downarrow$

La condition initiale $f(x_0) = y_0$ implique

$\downarrow$

$$ce^{ax_0} = y_0, \text{ soit } c = y_0 e^{-ax_0}.$$

$\downarrow$

Nous en déduisons, pour tout réel x,
$$f(x) = y_0 e^{-ax_0} e^{ax} = y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

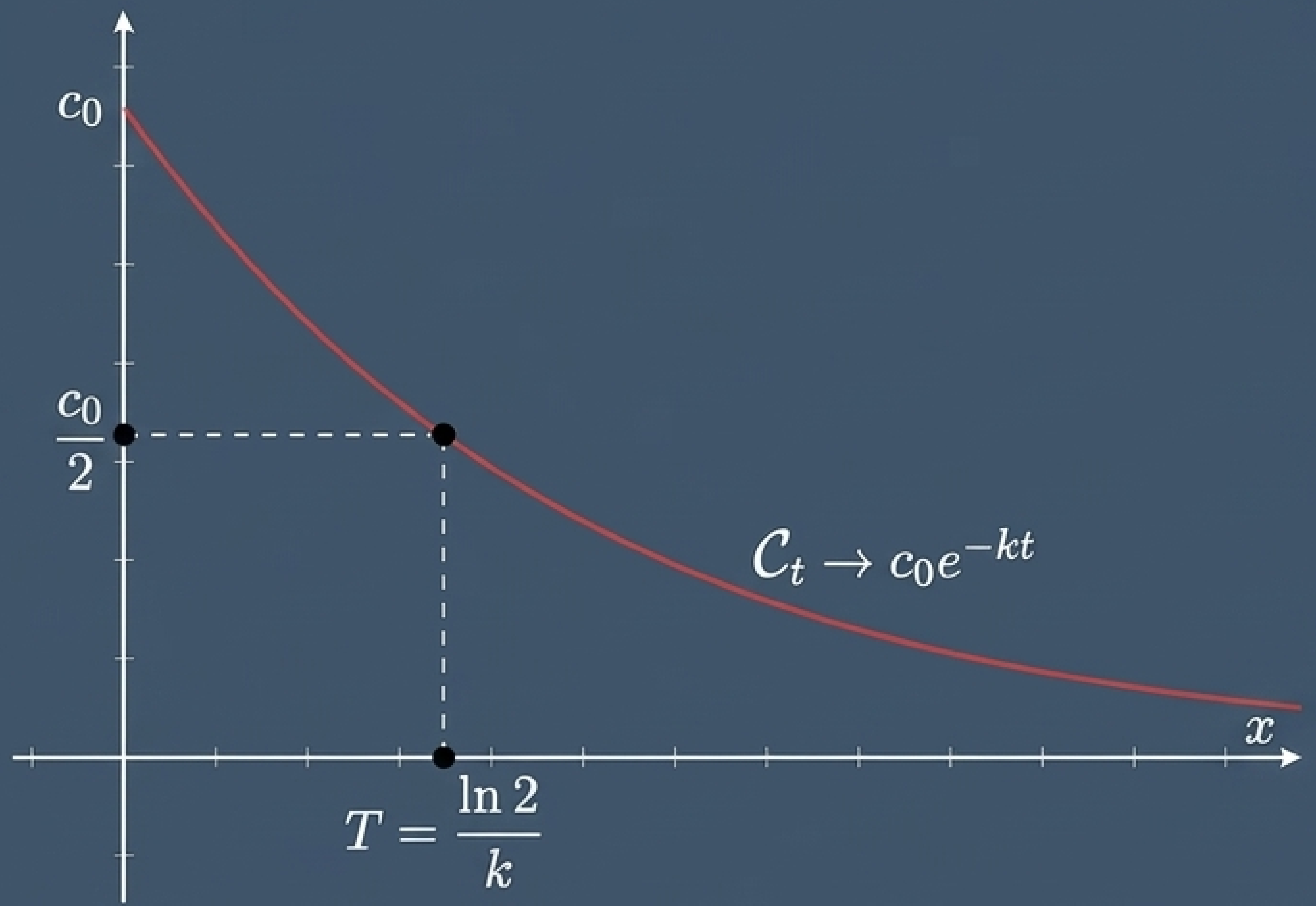
Solution spécifique

$$f(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$$

Application Pratique

Nous résolvons l'équation différentielle $y' + 2y = 0$, avec $y(0) = 1$.
Cette équation équivaut à $y' = -2y$ et $y(0) = 1$.
En appliquant la proposition précédente, nous obtenons que cette équation admet pour unique solution la fonction f définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^{-2x}.$$

Manifestation Biologique : Pharmacologie et Demi-vie



Le Modèle d'Élimination

La demi-vie T de ce médicament désigne le temps nécessaire pour que la concentration de ce médicament dans le plasma sanguin soit diminuée de la moitié de sa valeur initiale.

Ainsi le réel $T > 0$ satisfait à l'équation :

$$c(T) = \frac{c_0}{2}, \text{ soit } c_0 e^{-kT} = \frac{c_0}{2}.$$

Après simplification par $c_0 > 0$, nous obtenons :

$$e^{-kT} = \frac{1}{2} \iff kT = \ln 2.$$

Nous en concluons que la demi-vie T, en fonction de $k > 0$, est

$$\boxed{T = \frac{\ln 2}{k}.}$$

Le Niveau Supérieur : L'Équation Différentielle Affine $(y' = ay + b)$

Proposition 14.9

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes.

(i) f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

(ii) f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a}.$$

Démonstration

$\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)}}$

Soit f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f'(x) = af(x) + b$.

Puisque $a \neq 0$, nous en déduisons

Règle d'or de la Solution Globale

- La fonction $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est une solution particulière de l'équation $y' = ay + b$.
- La solution générale de cette équation s'obtient en additionnant cette solution particulière et la solution générale de $y' = ay$.
- L'équation différentielle $y' = ay + b$ qui équivaut à $y' - ay = b$ est une équation linéaire du premier ordre avec un second membre constant.

Équation Complète =
Générale (Homogène) + Particulière

NotebookLM

Maîtriser l'Affine : Résolution avec Condition Initiale

Proposition 14.10

Soient $a \neq 0, b, x_0$ et y_0 quatre réels. L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une unique solution f satisfaisant à la condition initiale $f(x_0) = y_0$.

La solution générale est de la forme $f(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a}$.

La condition $f(x_0) = y_0$ impose $ce^{ax_0} - \frac{b}{a} = y_0$, d'où $ce^{ax_0} = y_0 + \frac{b}{a}$.

Ainsi, $c = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{-ax_0}$.

L'unique solution est donc

$$f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{-ax_0} e^{ax} - \frac{b}{a} = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}.$$

Mise en Pratique : Exemple 14.15

Nous résolvons l'équation différentielle $2y' + y = 3$. Cette équation équivaut à $y' = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$.

La proposition précédente permet d'affirmer que les solutions de l'équation différentielle $2y' + y = 3$ sont les fonctions $x \mapsto ce^{-\frac{1}{2}x} + 3$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Nous déterminons à présent la solution f de cette équation telle que sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ passe par l'origine du repère choisi. La condition initiale se traduit par $f(0) = 0$, c'est-à-dire $c + 3 = 0$, soit $c = -3$.

Nous en concluons que la solution f telle que $f(0) = 0$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto 3\left(1 - e^{-\frac{1}{2}x}\right).$$

Manifestation Thermique & Matrice de Synthèse

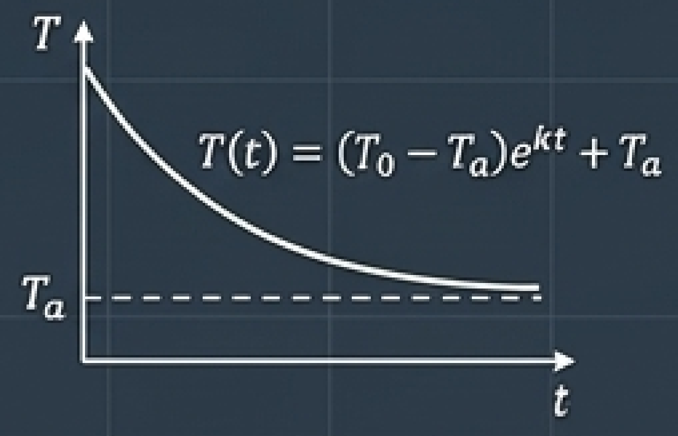
La Loi de Refroidissement de Newton

Exemple 14.16 : Refroidissement thermique.
La vitesse de refroidissement est proportionnelle à l'écart de température avec l'ambiant (T_a).

Équation : $T'(t) = k(T(t) - T_a) = kT(t) - kT_a$.
(Modèle affine : $a{=}k$, $b{=}{-kT_a}$).

Résolution avec $T(0) = T_0$:
$T(t) = c\,e^{kt} + T_a \rightarrow T_0 = c + T_a \rightarrow c = T_0 - T_a$.

Modèle Final : $T(t) = (T_0 - T_a)e^{kt} + T_a$.



Matrice Analytique de Comparaison

Équation Linéaire ($y' = ay$)	**Équation Affine** ($y' = ay + b$)
- Forme Générale : $f(x) = c\,e^{ax}$ - Avec $y(x_0){=}y_0$: $f(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$	- Forme Générale : $f(x) = c\,e^{ax} - \frac{b}{a}$ - Avec $y(x_0){=}y_0$: $f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$