Chapitre 15 : Intégration

Le Plan Décrypté :
De la fondation théorique aux algorithmes d'approximation.

La Quête de la Mesure

Antiquité (Archimède)

Les Polygones

Calcul de l'aire d'un disque en approchant par la somme des aires de triangles inscrits et exinscrits. Premier encadrement de π.

XVII^{e} Siècle (Newton & Leibniz)

L'Infinitésimal

Développement conjoint du calcul infinitésimal : le lien fondamental entre la dérivation (variation) et l'intégration (cumul).

XIX^{e} Siècle (Riemann)

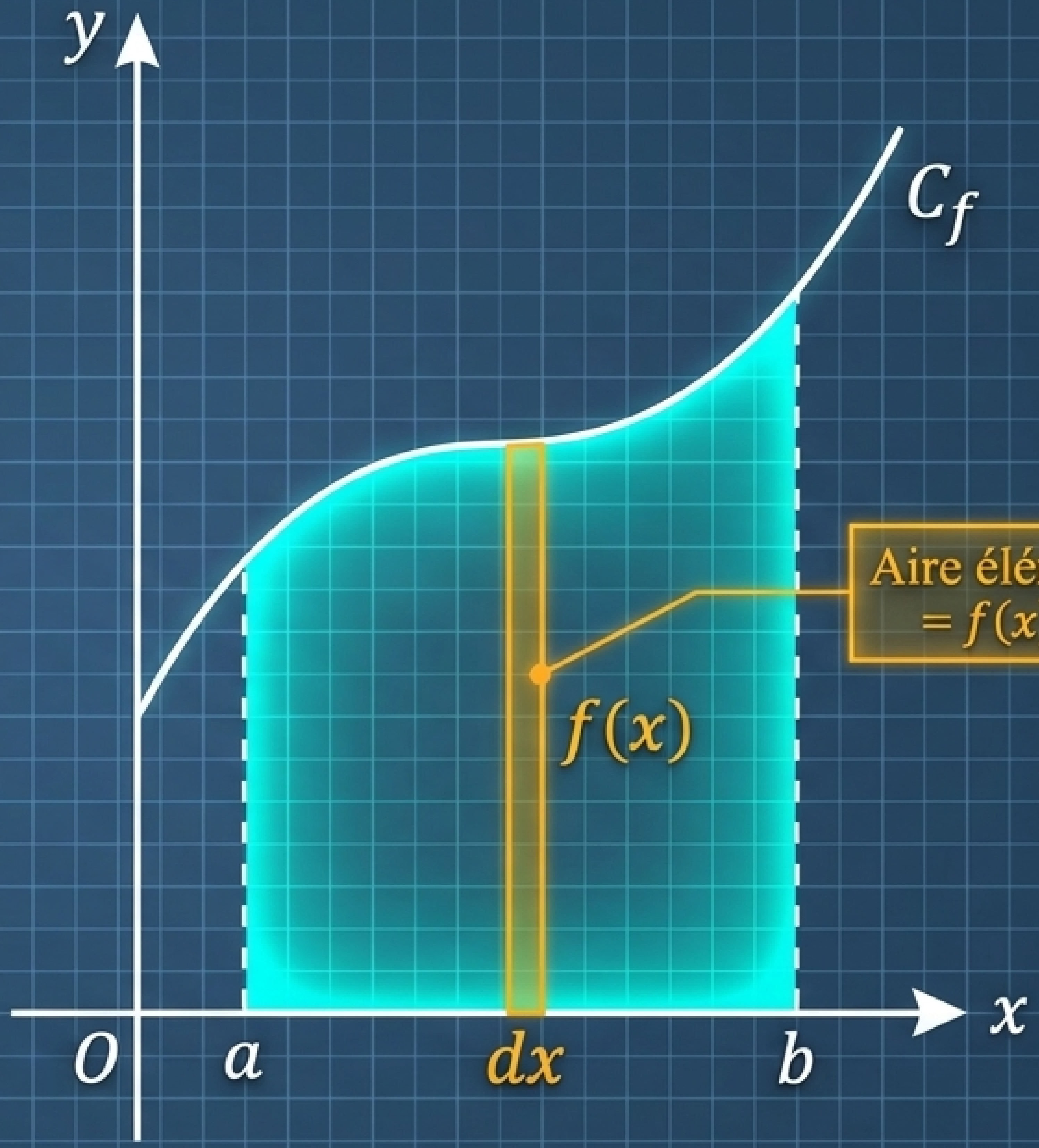
La Théorie Moderne

Bernhard Riemann formalise la théorie rigoureuse de l'intégrale, fondation des mathématiques modernes et des probabilités.

Définition : L'Intégrale (Fonction continue positive)

$$\int_a^b f(x)dx$$

L'aire (en unités d'aire) du domaine D des points M(x,y) tels que a $\leq x \leq b$ et $0 \leq$ y $\leq f(x)$.



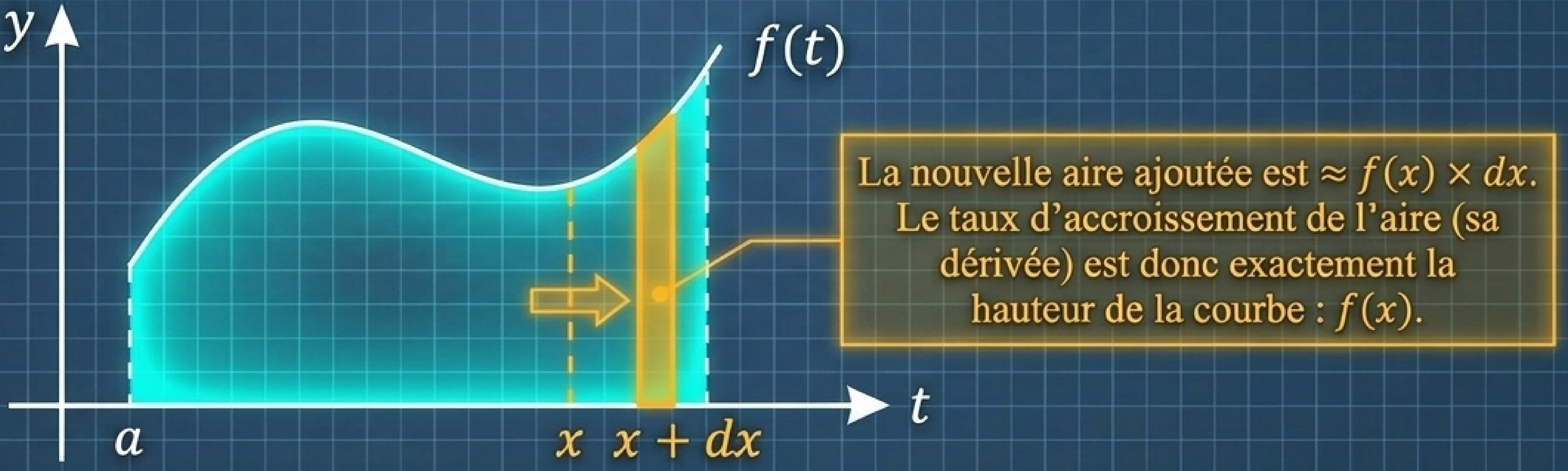
Note : x est une variable muette ($\int f(x)dx = \int f(t)dt$).

NotebookLM

Le Pilier Central : Primitives et Intégrale

<u>Proposition 15.1</u> : Si f est continue sur I, la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$



Le Calcul Pratique : Le Théorème Fondamental

Soit $G(x) = \int_a^x f(t)dt$. (Primitive qui s'annule en a).

$\Downarrow$

Soit F une primitive quelconque de f. $\Rightarrow F(x) = G(x) + c$.

$\Downarrow$

$F(b) - F(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) = G(b) - G(a)$.

$\Downarrow$

Sachant que $G(a) = 0$, il reste $G(b) = \int_a^b f(t)dt$.

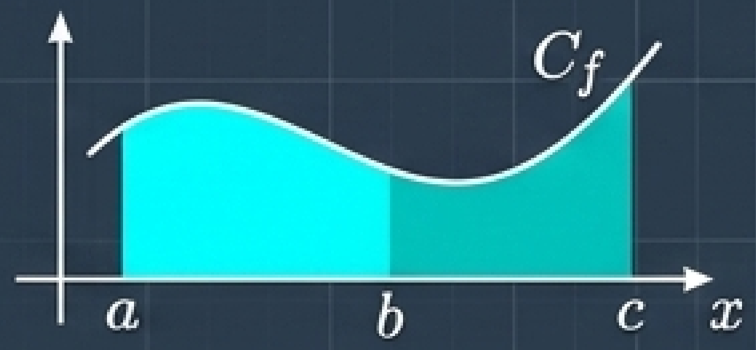
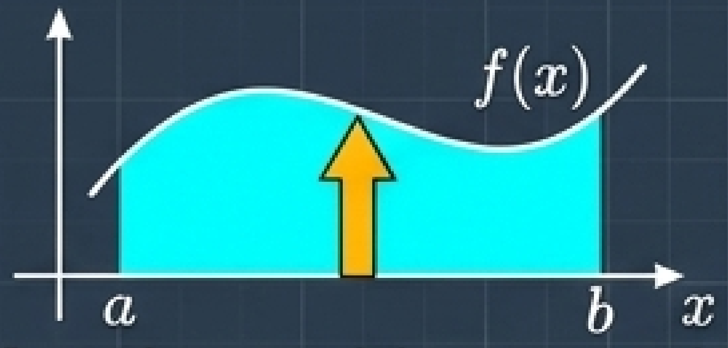
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Exemple Rapide

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$$

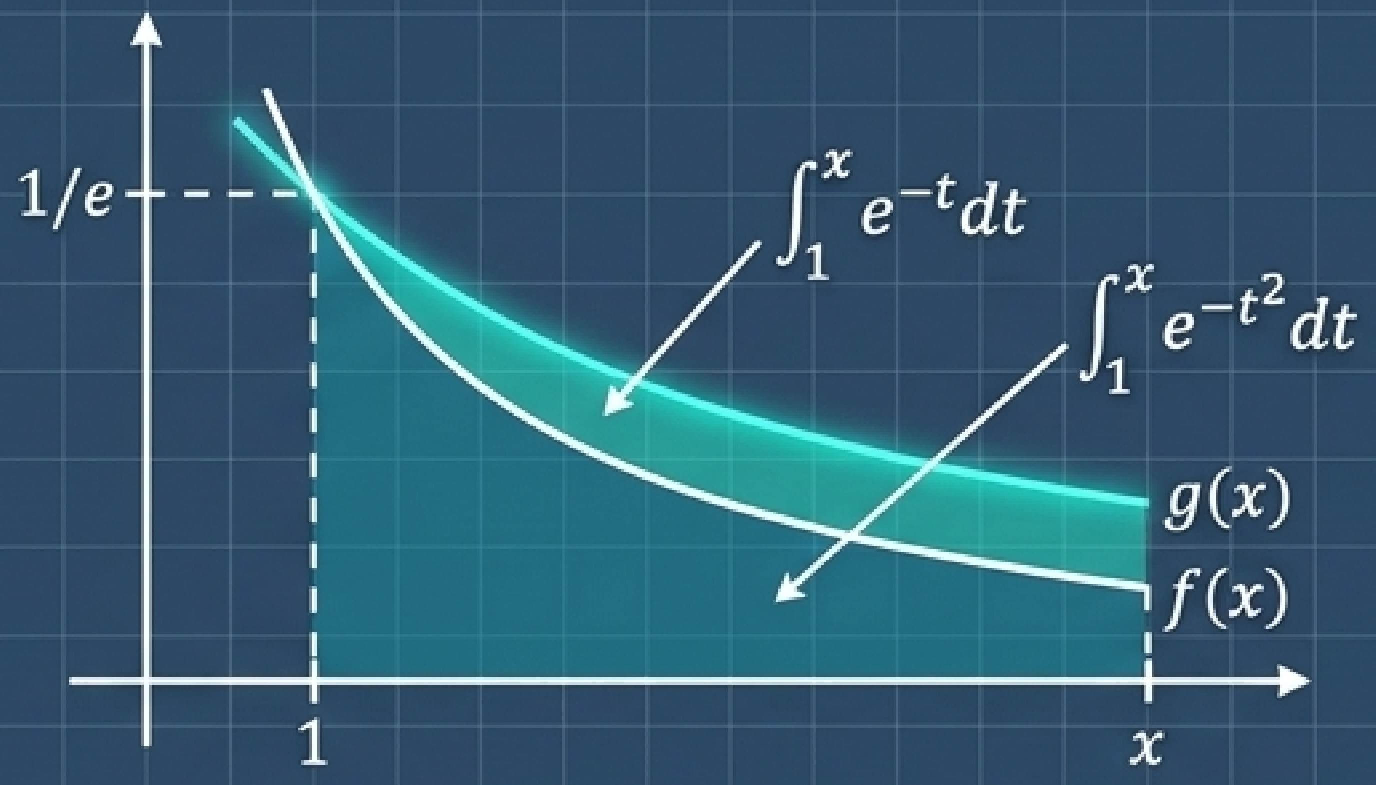
La Boîte à Outils Algébrique

Propriété	Formule Mathématique	Visualisation & Sens
Linéarité	$\int (f(x) + g(x)) = \int f(x) + \int g(x)$ $\int \lambda f(x) = \lambda \int f(x)$	 Sens : L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales.
Relation de Chasles	$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$	 Sens : L’additivité des aires adjacentes.
Positivité	Si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$ $(a \leq b)$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$	 Sens : Une fonction positive engendre une aire positive (attention à l’ordre des bornes!).

Intégrales et Inégalités : Comparer sans calculer

Croissance de l'intégrale

Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.



Puisque $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ pour $t \geq 1$, nous déduisons $\int_1^x e^{-t^2}dt \leq \int_1^x e^{-t}dt$.

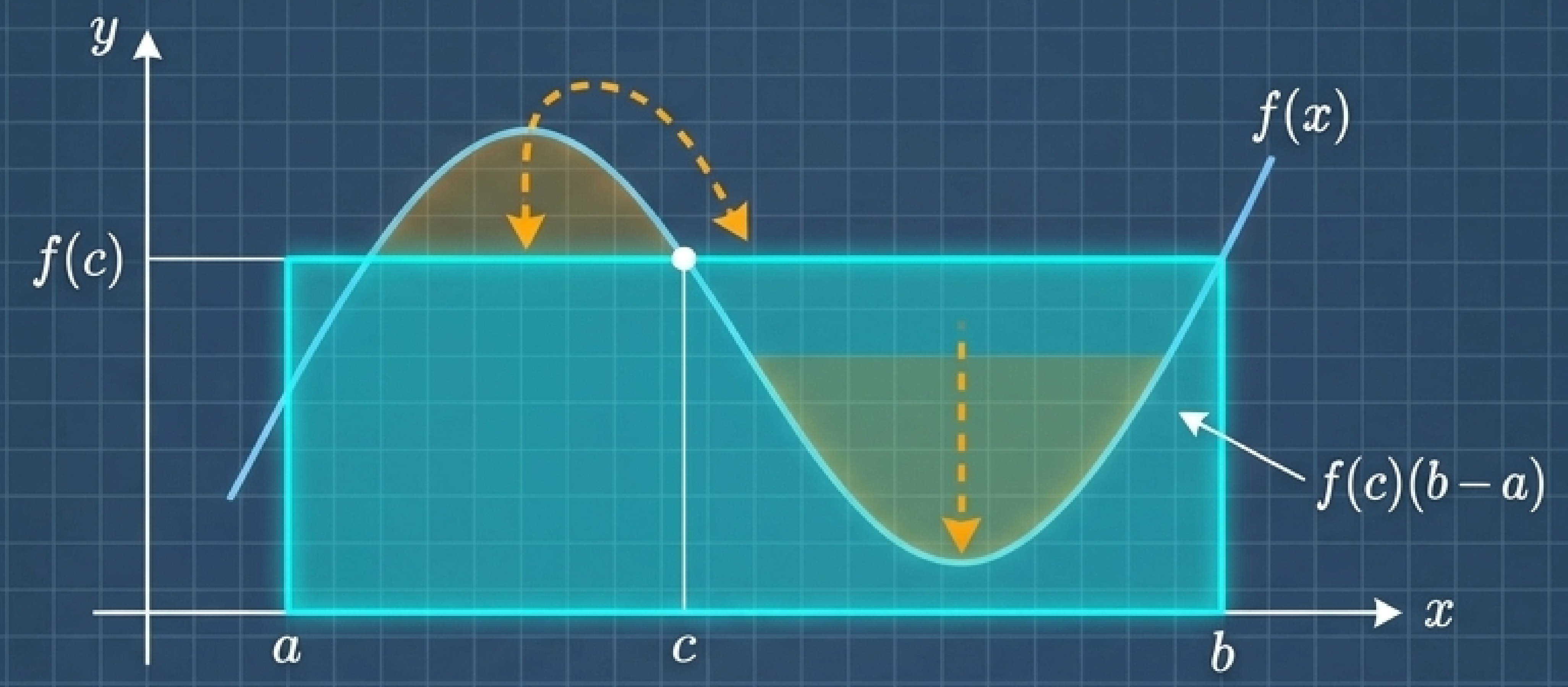
Valeur Absolue (Corollaire 15.11)

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

L'aire nette (qui peut s'annuler si la courbe traverse l'axe zéro) est toujours inférieure ou égale à l'aire totale cumulée.

Théorème de la Moyenne (Valeur Moyenne)



La Formule

$$f_{moyenne} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

L'interprétation

Il existe un point c où la hauteur du rectangle $f(c) \times (b-a)$ donne exactement la même aire que l'aire complexe sous la courbe.

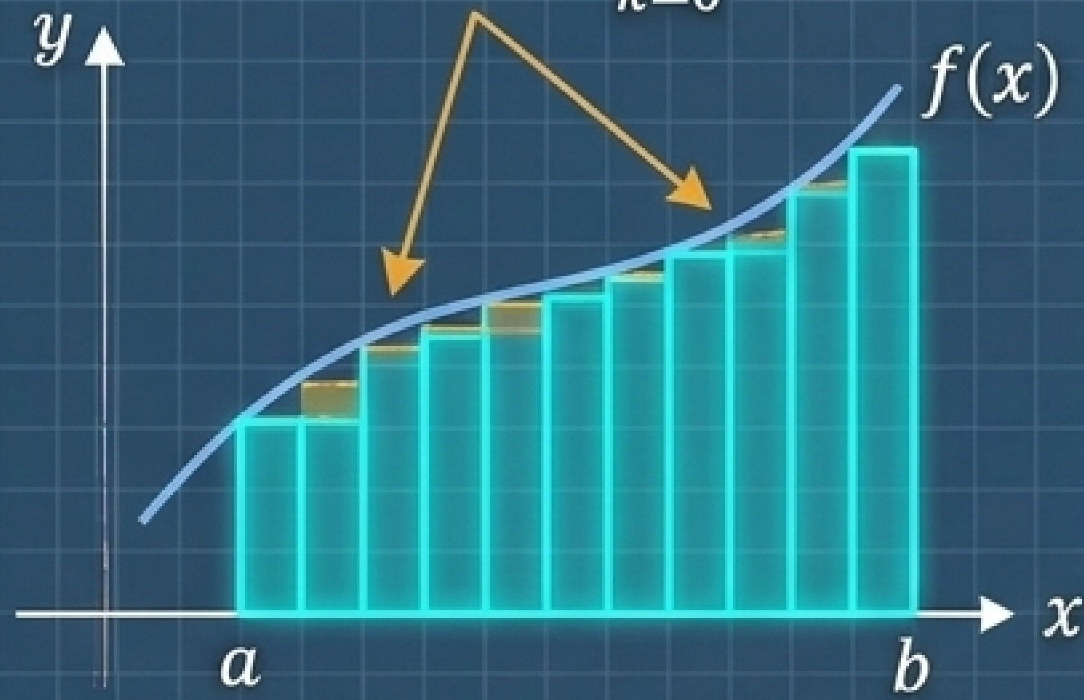
Exemple : La valeur moyenne de $2 + \cos((\pi/2)x)$ sur $[-2, 3]$ est égale à $2 - (2/(5\pi))$.

Méthode des Rectangles : Encadrer l'Inconnu

Quand la primitive est introuvable, nous encadrons l'aire exacte par des sommes de Riemann.

Somme par défaut / S_n

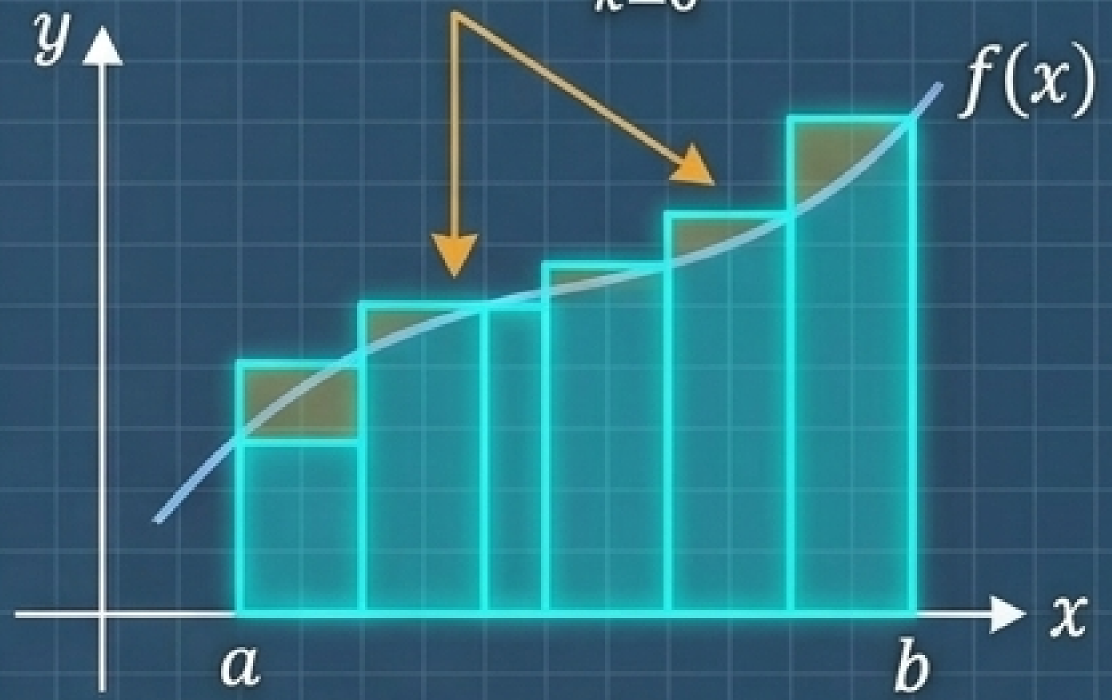
$$S_n = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$



$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Somme par excès / S'_n

$$S'_n = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})$$

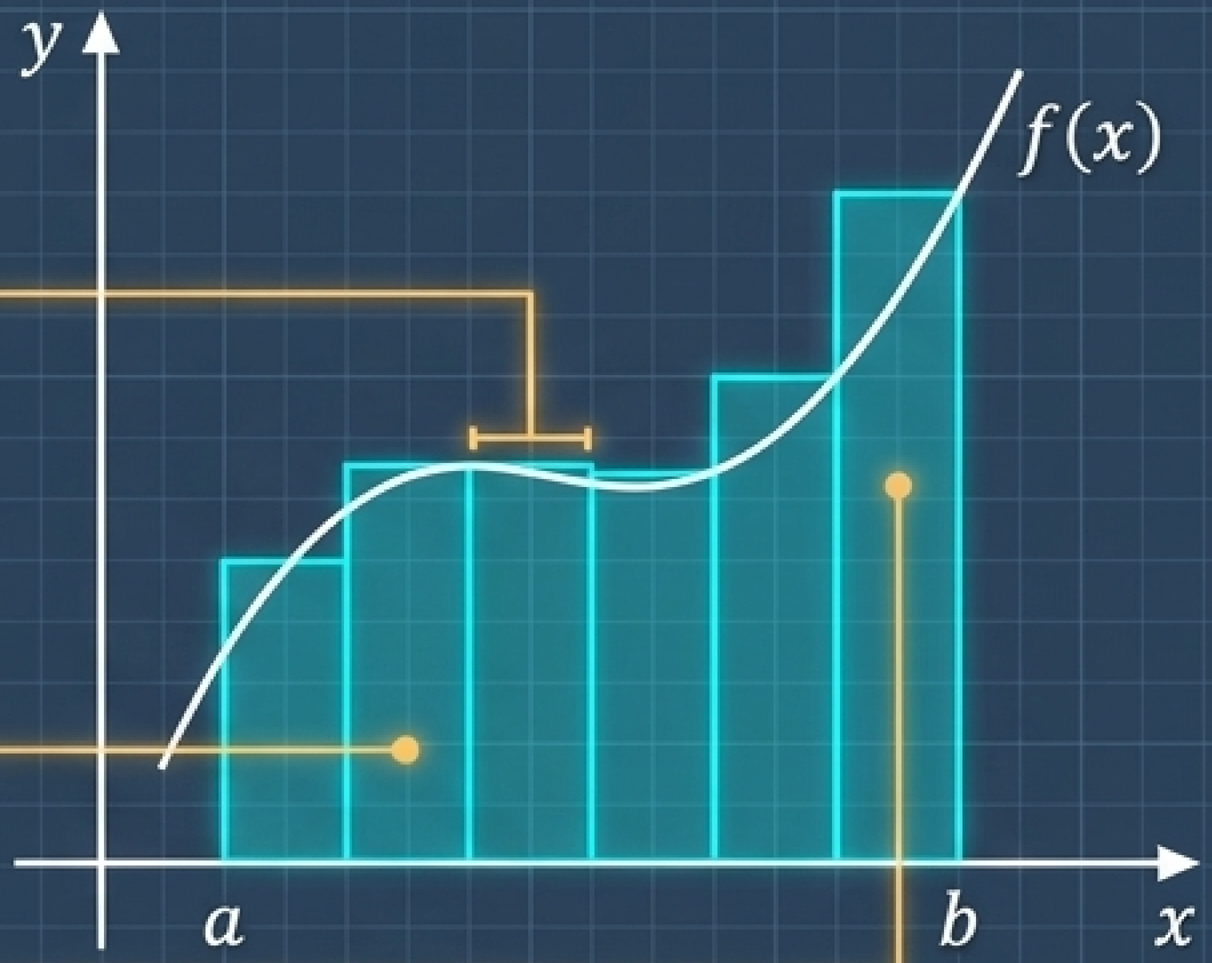


L'encadrement parfait : $S_n \leq I \leq S'_n$. À l'infini ($\lim\limits_{n\to+\infty}$) , l'erreur $\left(\frac{b-a}{n}\right)(f(b)-f(a))$ tend vers 0, et les deux sommes convergent vers I.

Traduction Algorithmique (Python)

```python
def rect(f, a, b, n):
    h = (b-a)/n
    u, v = 0, 0
    x = a
    for i in range(n):
        u = u + h * f(x)
        x = x + h
        v = v + h * f(x)
    return (u, v)
```

Le pas / largeur



Utilité :
Calculer des approximations quand les primitives sont impossibles (ex : $\int_0^1 \ln(1+x)dx \approx 0.386$).

Outil Avancé : L'Intégration par Parties

L'erreur classique : L'intégrale d'un produit n'est pas le produit des intégrales !

Preuve : $\int_0^1 t(t+1)dt = 5/6$, mais $\left(\int_0^1 t\,dt\right) \times \left(\int_0^1 (t+1)dt\right) = 3/4$.

Anatomie de la Formule

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Le produit complexe d'origine (ex: polynôme × trigonométrie).

La partie déjà intégrée (calcul direct).

La 'nouvelle' intégrale, choisie pour être plus simple que l'originale grâce à la dérivation de u.

Intégration par Parties : En Pratique

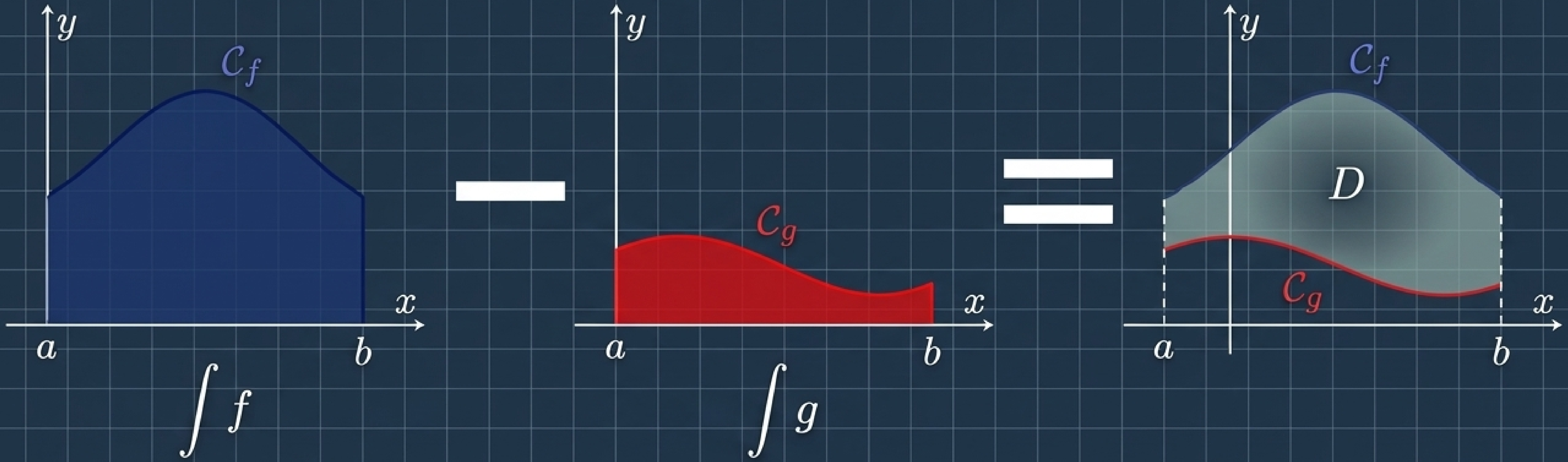
Objectif : Calculer $I = \int_0^{\pi} x \sin(2x)\, dx$

Étape 1 : Le Choix	Posons : $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(2x)$
Étape 2 : Dérivation & Primitivation	On déduit : $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$
Étape 3 : L'Échange	$I = \left[x\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \times \left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx$
Étape 4 : La Résolution	Le crochet donne : $-\pi/2$ La nouvelle intégrale donne : $+1/2\,\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = 0$

Résultat : $\mathrm{I} = -\pi/2$

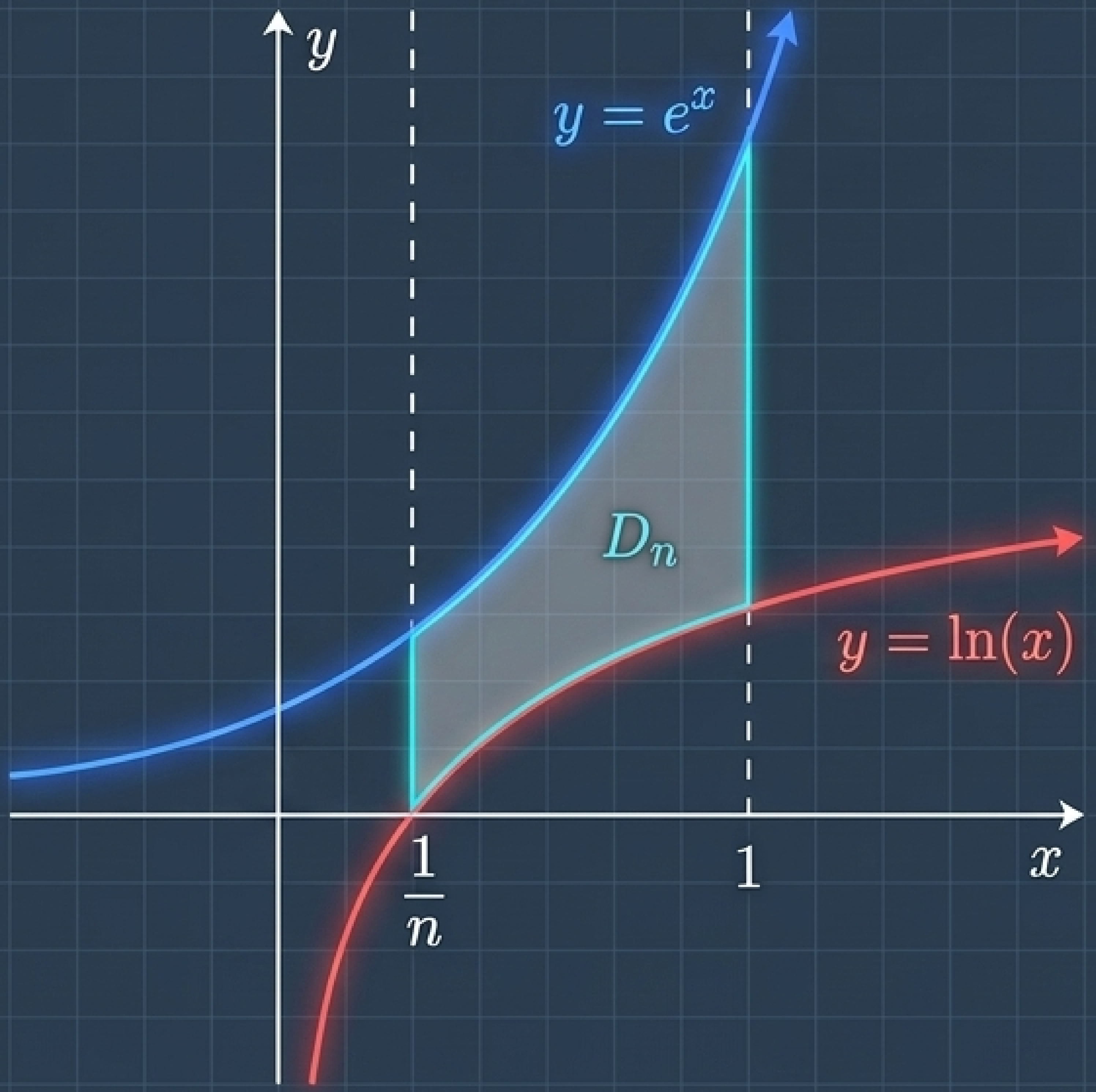
Aires Entre Deux Courbes

Si $g(x) \leq f(x)$ sur $[a, b]$, l'aire D entre les courbes est $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))dx$.



Par linéarité des intégrales, on soustrait géométriquement 'le vide' en dessous de $g(x)$ pour isoler le domaine D.

Application Géométrique Complexe



Objectif : Calculer l'aire a_n pour $n \geq 1$.

Formule : $a_n = \int_{1/n}^{1} (e^x - \ln x)\, dx$

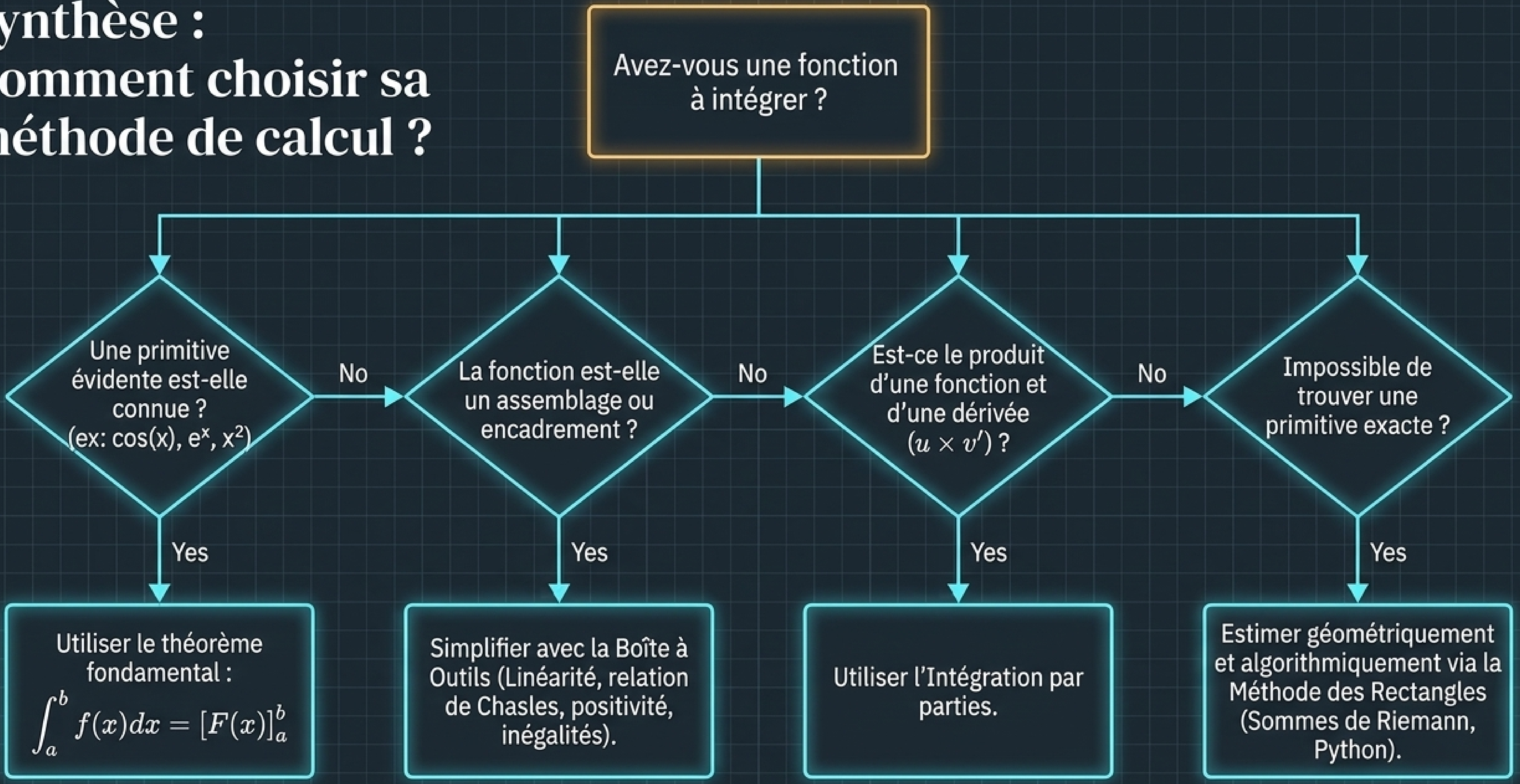
Rappel : Une primitive de $\ln(x)$ est $x \ln x - x$.

Résultat : $a_n = \left[e^x - x \ln x + x\right]_{1/n}^{1} =$

$$e + 1 - e^{1/n} + \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}.$$

Ce calcul démontre comment le calcul analytique permet de résoudre des aires frontières qui se déplacent en fonction d'une variable (n).

Synthèse : Comment choisir sa méthode de calcul ?



L'intégration est à la fois un outil géométrique abstrait et un algorithme numérique précis.