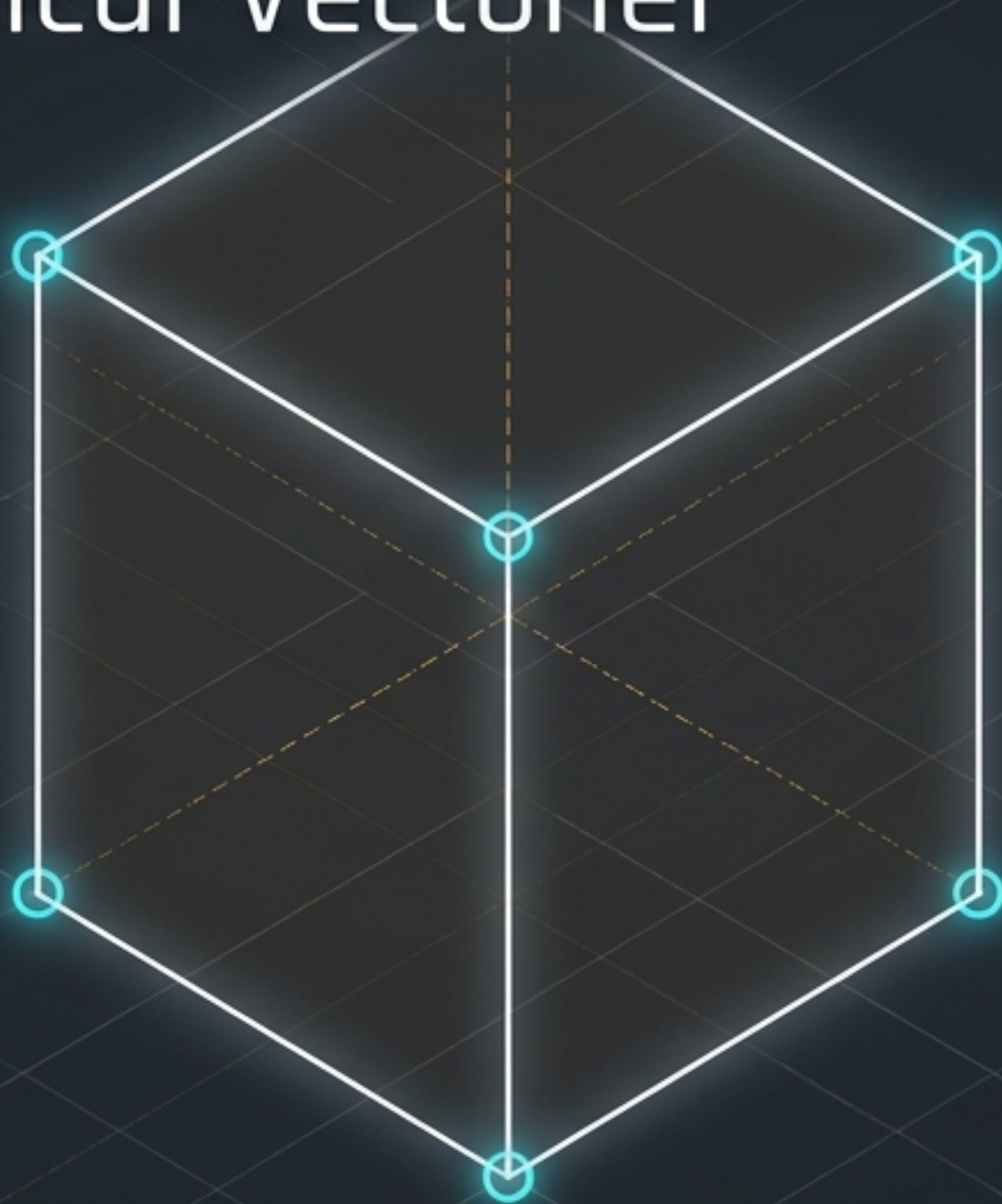


L'Architecture de l'Espace : Géométrie et Calcul Vectoriel

De la brique élémentaire à la
modélisation tridimensionnelle
totale.



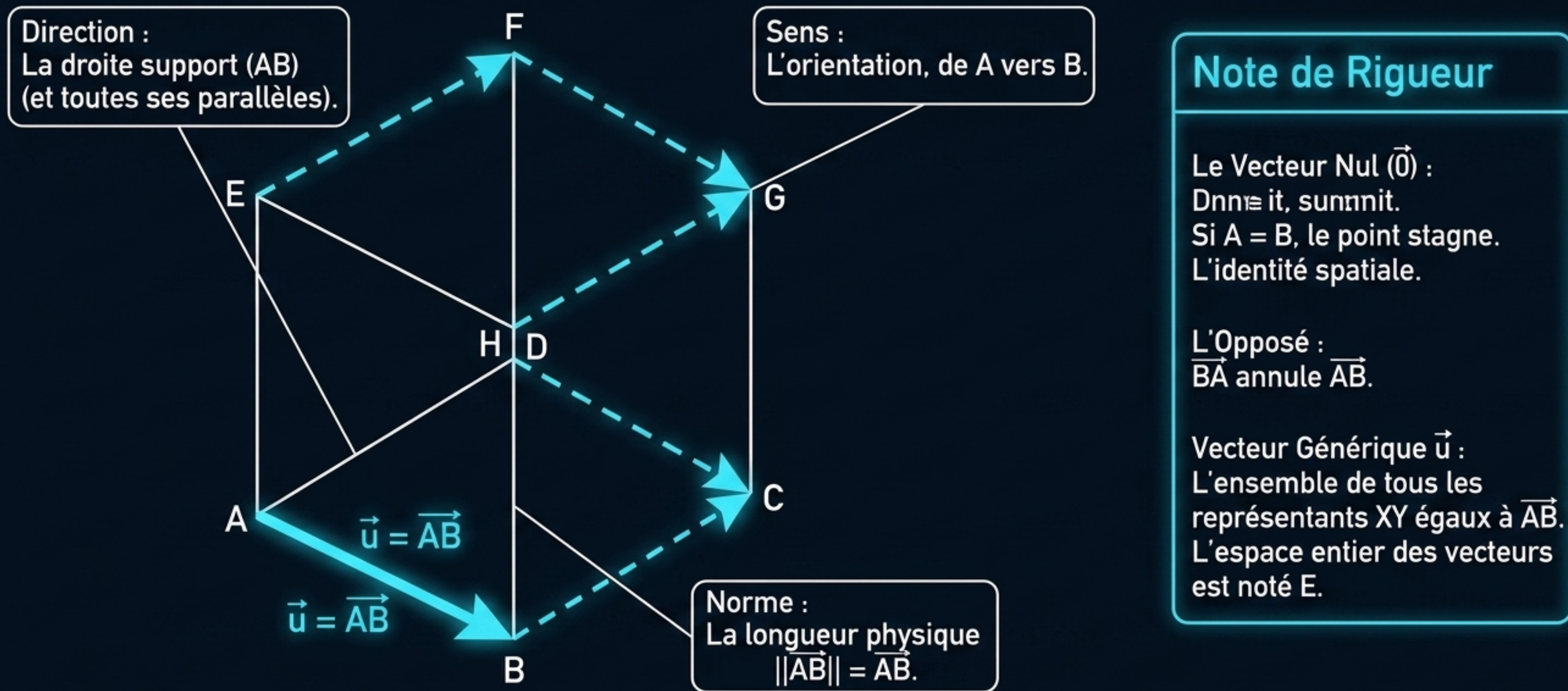
Note de Rigueur

Les Fondations (Axiomes) :

1. Trois points non alignés déterminent un plan unique.
2. Toute propriété de géométrie plane survit et s'applique dans n'importe quel plan de l'espace.

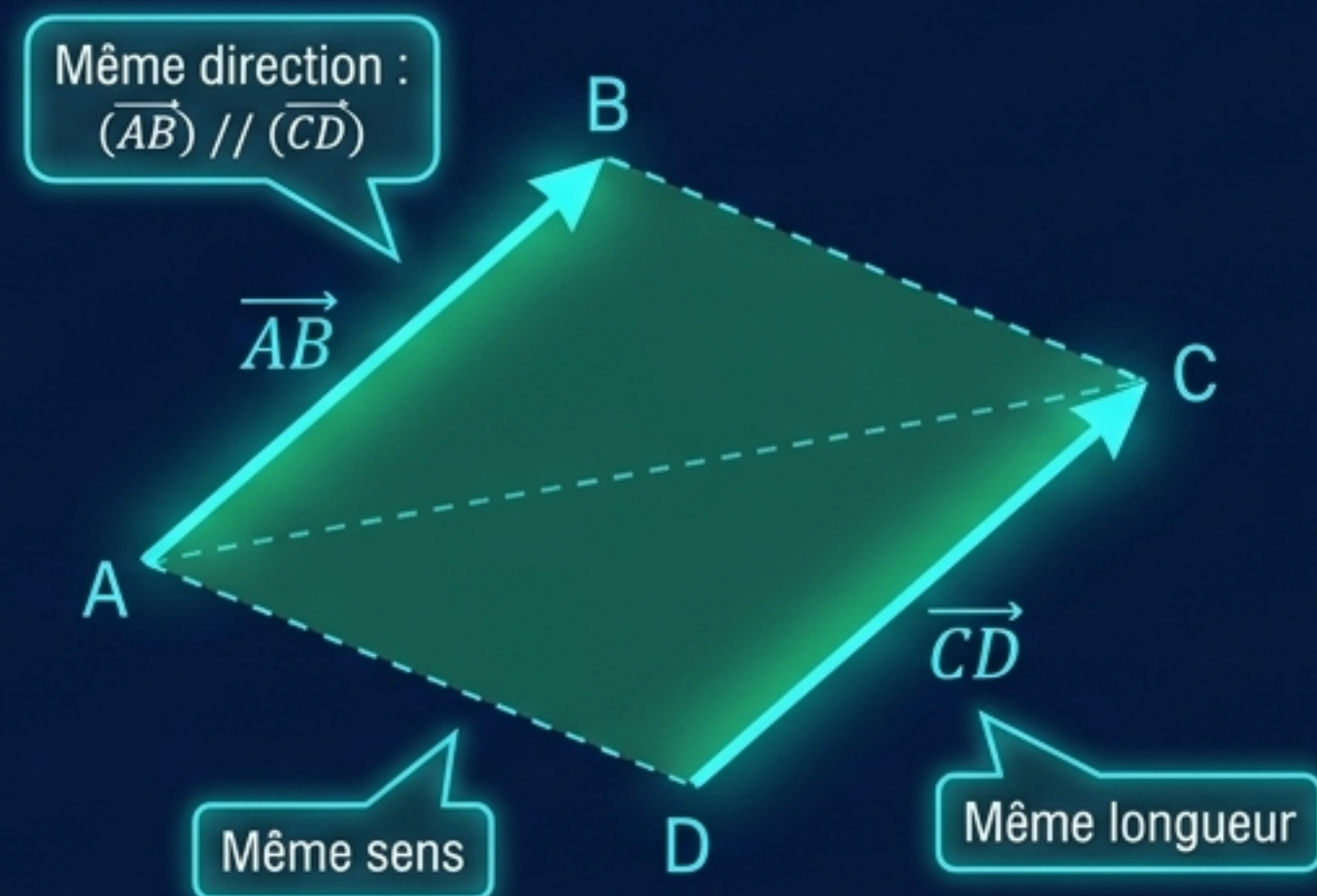
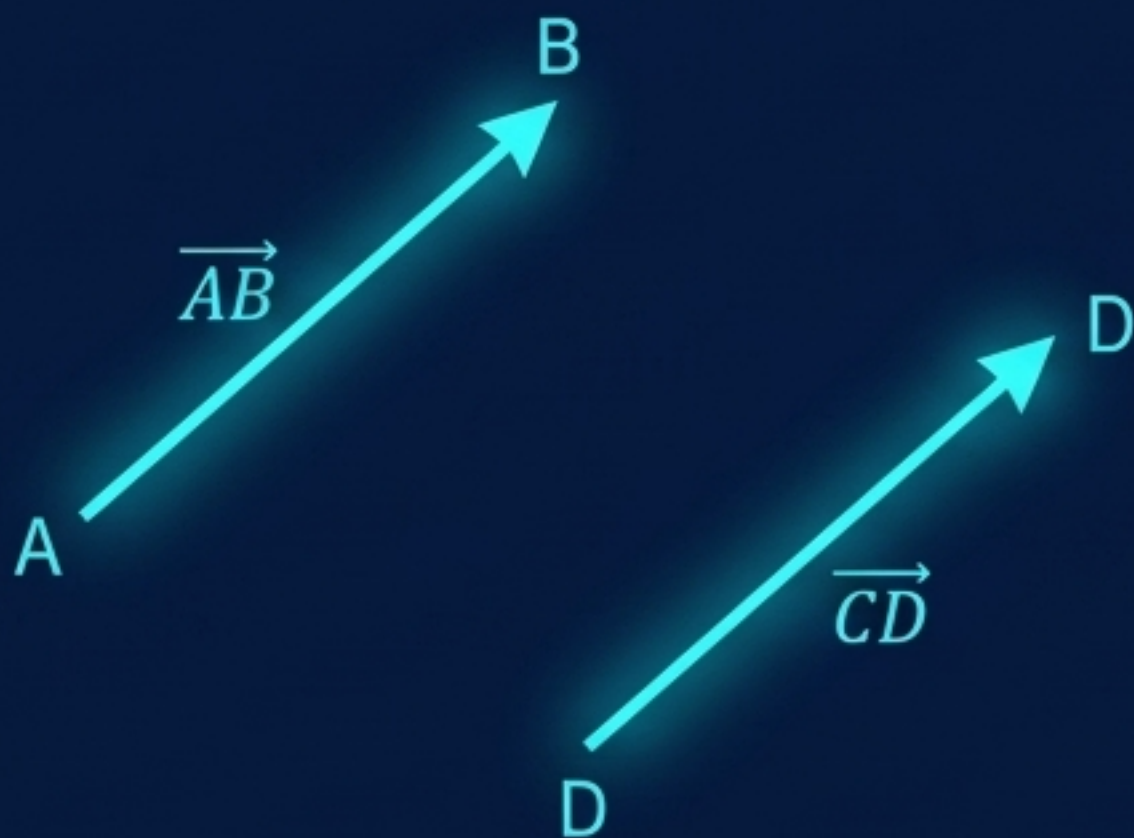
Le Cube sera notre
laboratoire géométrique
de référence.

La Brique Élémentaire : Anatomie du Vecteur



L'Égalité Vectorielle : Le Mouvement Parfait

$\vec{AB} = \vec{CD}$ ssi $ABDC$ est un parallélogramme.

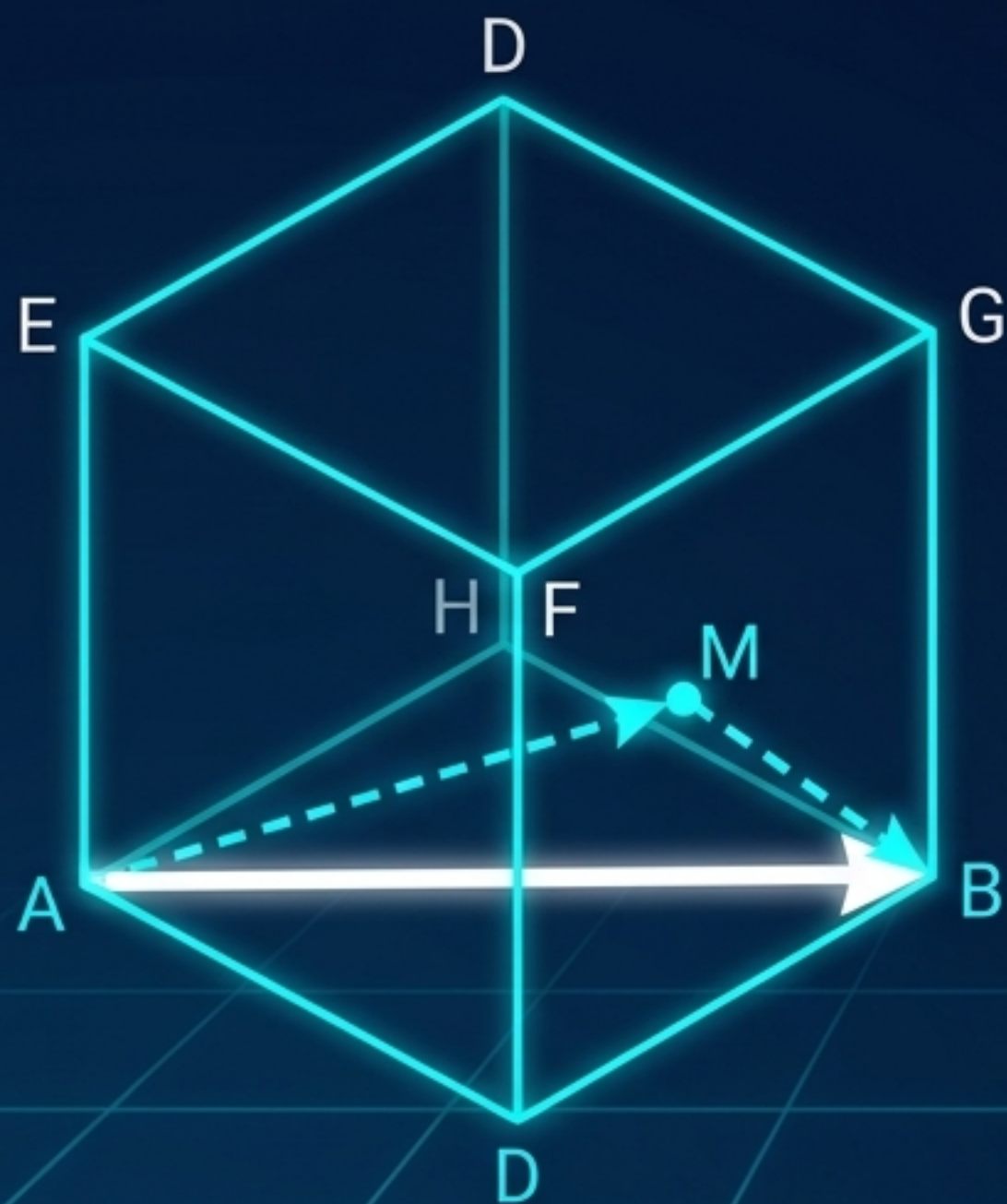


Note de Rigueur

La Translation : $\vec{AB} = \vec{CD}$ signifie que D est l'image exacte de C propulsé par la translation de vecteur \vec{AB} (notée t_{AB}).

Détermination Unique : Étant donné un point de départ O et un vecteur \vec{u} , il n'existe qu'un seul et unique point d'arrivée M tel que $\vec{OM} = \vec{u}$.

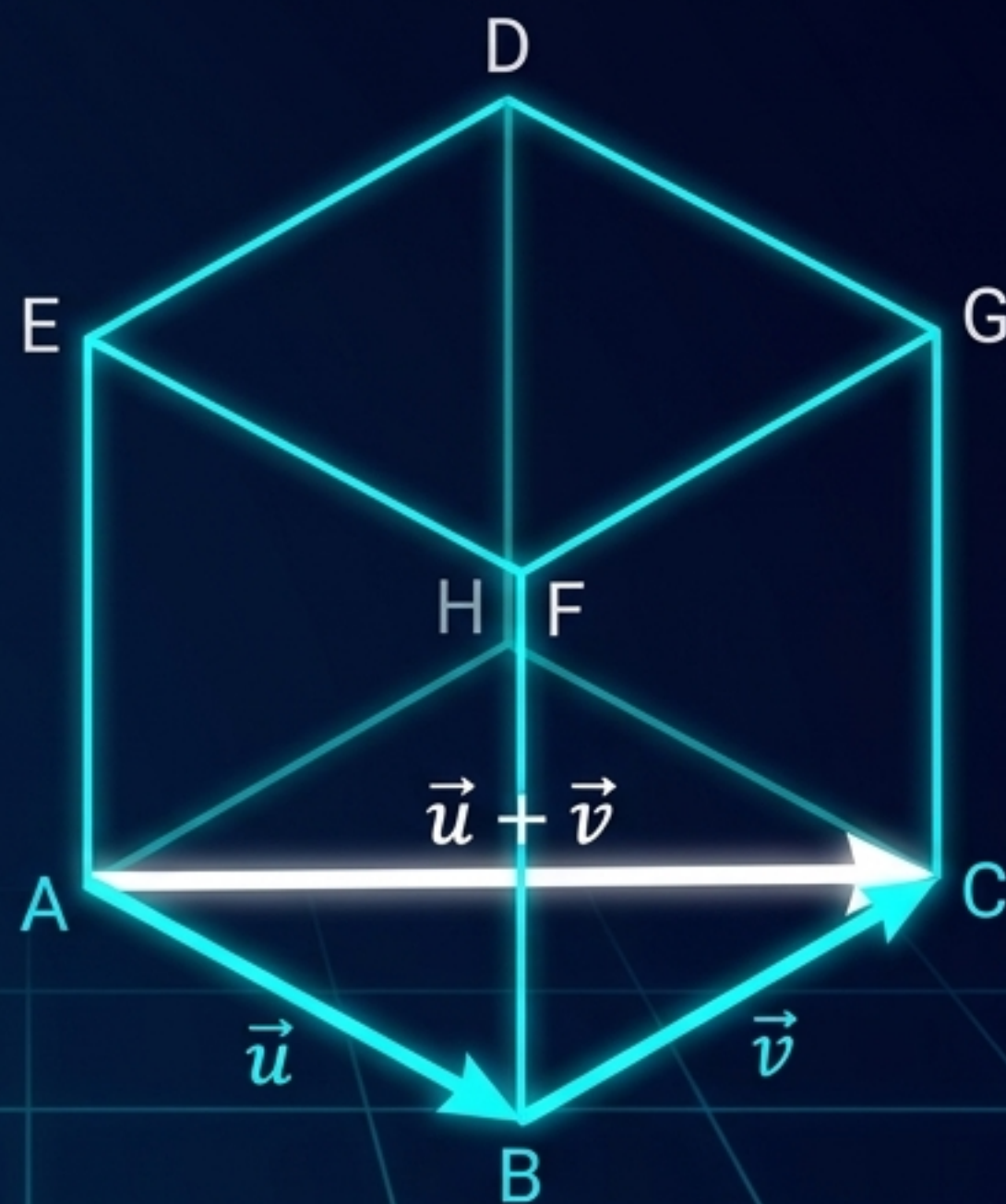
L'Assemblage : Fusionner les Déplacements



Relation de Chasles : Le raccourci spatial.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$$

Offre un degré de liberté infini pour décomposer l'espace.



Addition pure :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

Indépendant du point d'origine.

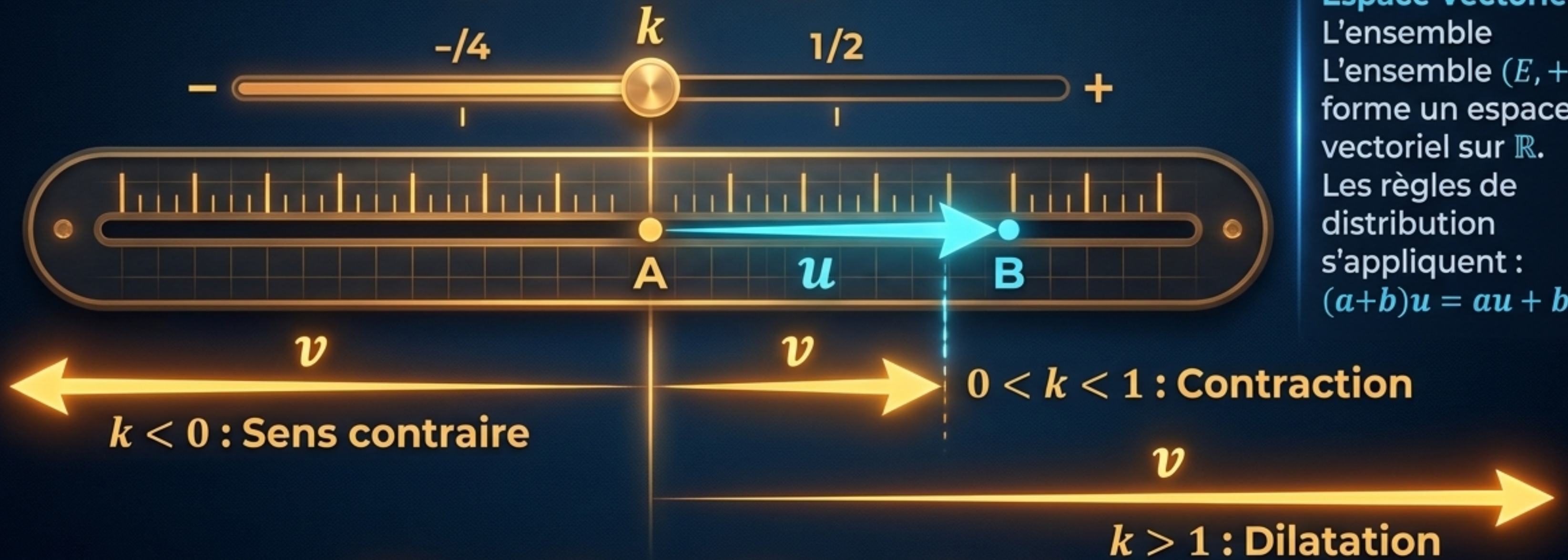
Note de Rigueur

Inégalité Triangulaire : En général, $\overline{AB} \leq \overline{AM} + \overline{MB}$. L'égalité stricte n'existe que si M est sur le segment [AB].

Propriétés Algébriques : Commutative ($\mathbf{u+v = v+u}$), Associative, et possède un élément neutre ($\mathbf{0}$). L'espace E est un groupe commutatif.

L'Étau Scalaire : Étirer, Compresser, Inverser

$$v = k \cdot u$$



Note de Rigueur

Espace Vectoriel :
L'ensemble
L'ensemble $(E, +, \cdot)$
forme un espace
vectoriel sur \mathbb{R} .
Les règles de
distribution
s'appliquent :
 $(a+b)u = au + bu$.

$$\|k \cdot u\| = |k| \times \|u\|$$

La Colinéarité : Le Test de Dépendance

Deux vecteurs \vec{u} , \vec{v} non nuls sont **colinéaires** s'ils partagent la même direction ssi il existe k réel tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$.

Note de Rigueur

Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

Vocabulaire d'ingénieur :
Des vecteurs colinéaires colinéaires sont dits **linéairement dépendants**. Ils ne créent pas de nouvelle dimension.

Alignement :
Origine commune (A).
 $\vec{AM} = k \cdot \vec{AB}$.

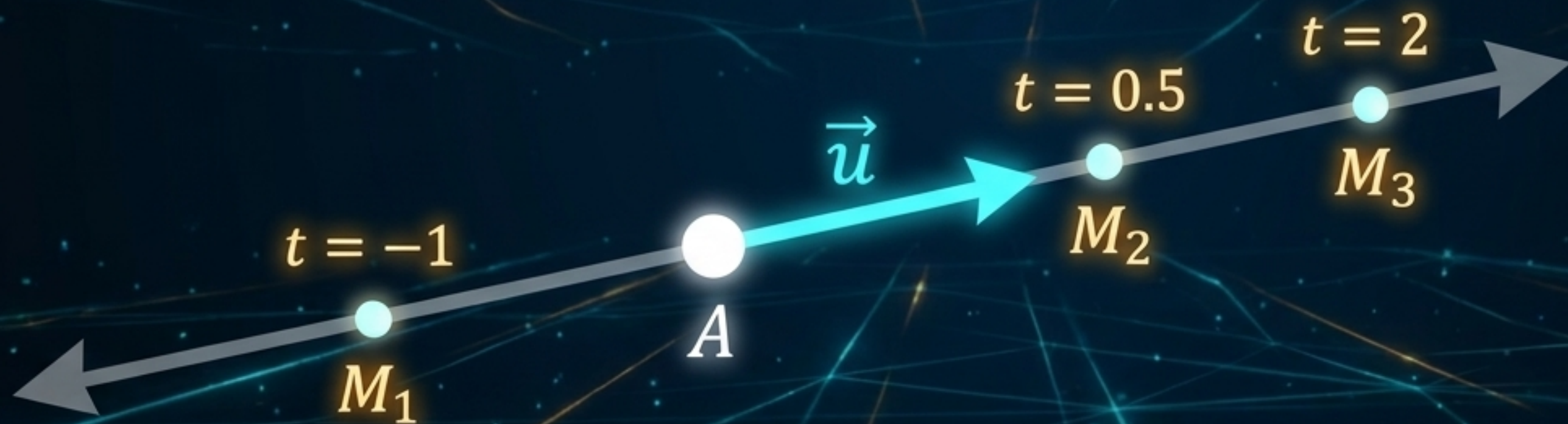


Parallélisme strict :
Origines distinctes.
 $\vec{ON} = k \cdot \vec{AB}$.

L'Ingénierie 1D : Tisser une Droite dans l'Espace

Une droite (d) est entièrement définie par un repère $(A; \vec{u})$.

M sur (d) ssi il existe t réel tel que $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}$



Note de Rigueur

Le paramètre t agit comme un curseur temporel ou spatial. C'est l'abscisse du point M sur cet axe 1D.

Restrictions :

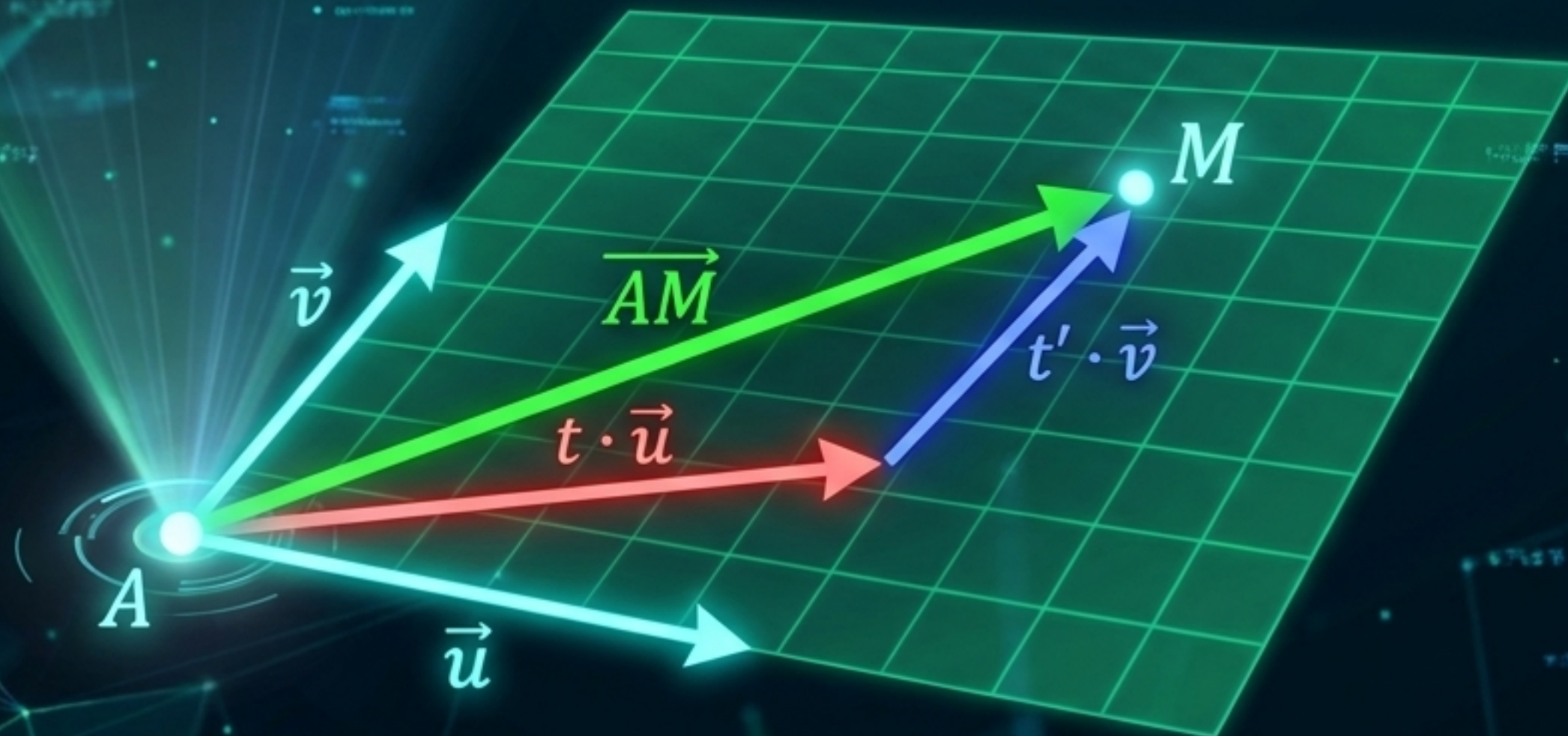
Segment $[AB]$ ssi t appartient à $[0,1]$

Demi-droite $[AB)$ ssi t est positif

L'Ingénierie 2D : Déployer un Plan

Trois points non alignés (A, B, C) génèrent un repère plan $(A; \vec{u}, \vec{v})$.




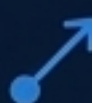
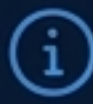
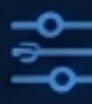
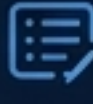
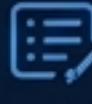
M sur (ABC) ssi il existe (t, t') réels tels que $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u} + t' \cdot \vec{v}$



Note de Rigueur

Coplanéarité : Le point M appartient au plan si et seulement si le vecteur \overrightarrow{AM} est une combinaison linéaire des vecteurs directeurs du plan.

Matrice Dimensionnelle : Droites vs Plans

1 Dimension (La Ligne) - Droite (d)	2 Dimensions (La Toile) - Plan (P)
	
 Générateurs : 1 point d'ancrage + 1 vecteur directeur (\vec{u}).	 Générateurs : 1 point d'ancrage + 2 vecteurs directeurs non colinéaires (\vec{u}, \vec{v}).
 Paramètres : 1 scalaire unique (t).	 Paramètres : 2 scalaires couplés (t, t').
 Caractérisation : $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}$	 Caractérisation : $\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u} + t' \cdot \vec{v}$

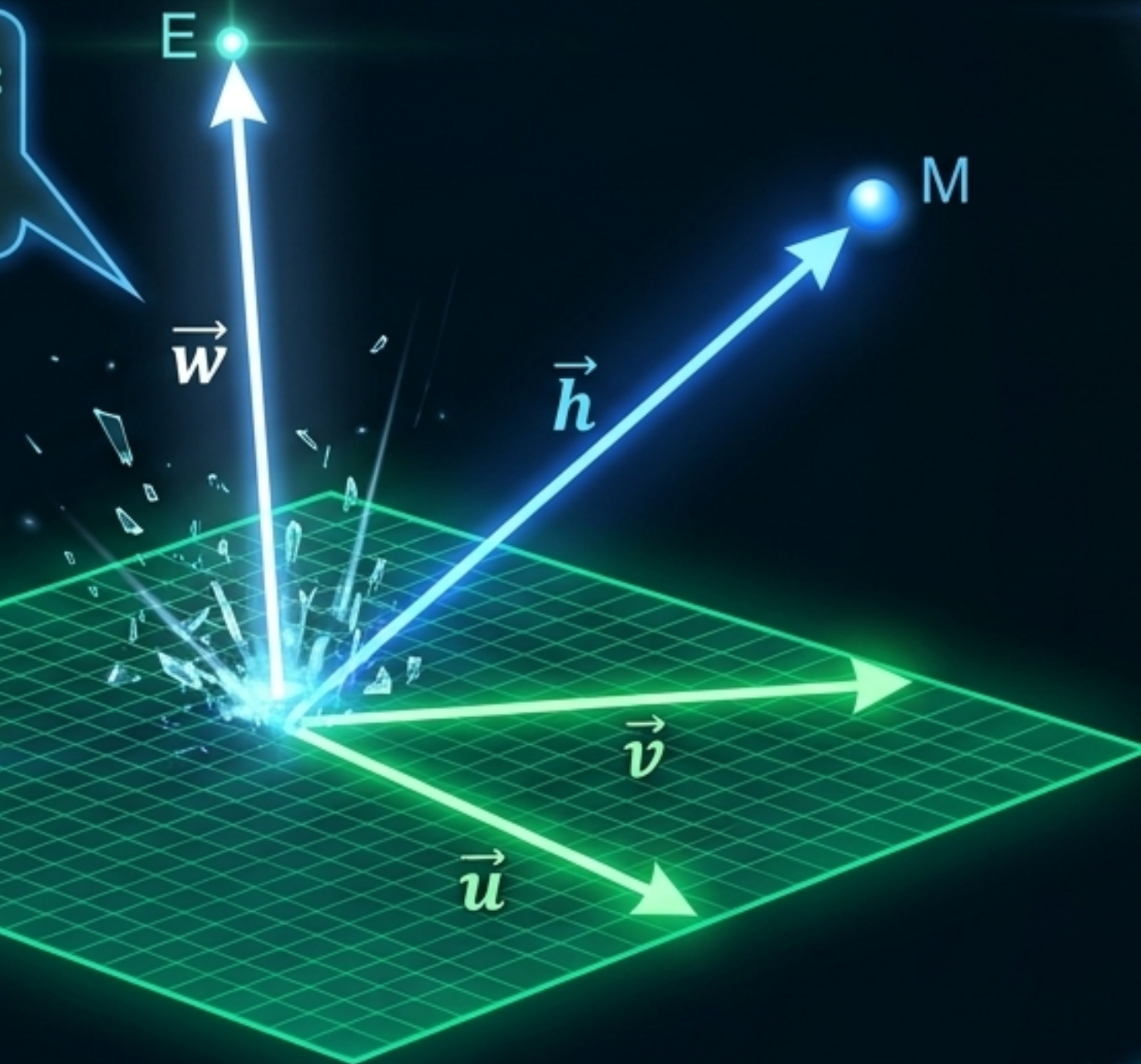
Note de Rigueur

L'ajout d'un vecteur directeur linéairement indépendant ajoute exactement une dimension géométrique au sous-espace modélisé.

L'Architecture 3D : Sortir de la Matrice (Coplanéarité)

Vecteurs non coplanaires :
Forment une Base pour
le Volume 3D.

**Vecteurs coplanaires
(dépendants) :**
 $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$
(prisonnier du plan).



Note de Rigueur

**Combinaison
Linéaire Totale :**

Tout vecteur \vec{h} de
l'espace peut alors
s'écrire de manière
unique :

$$\vec{h} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}.$$

Le triplet (a, b, c) est
scellé.

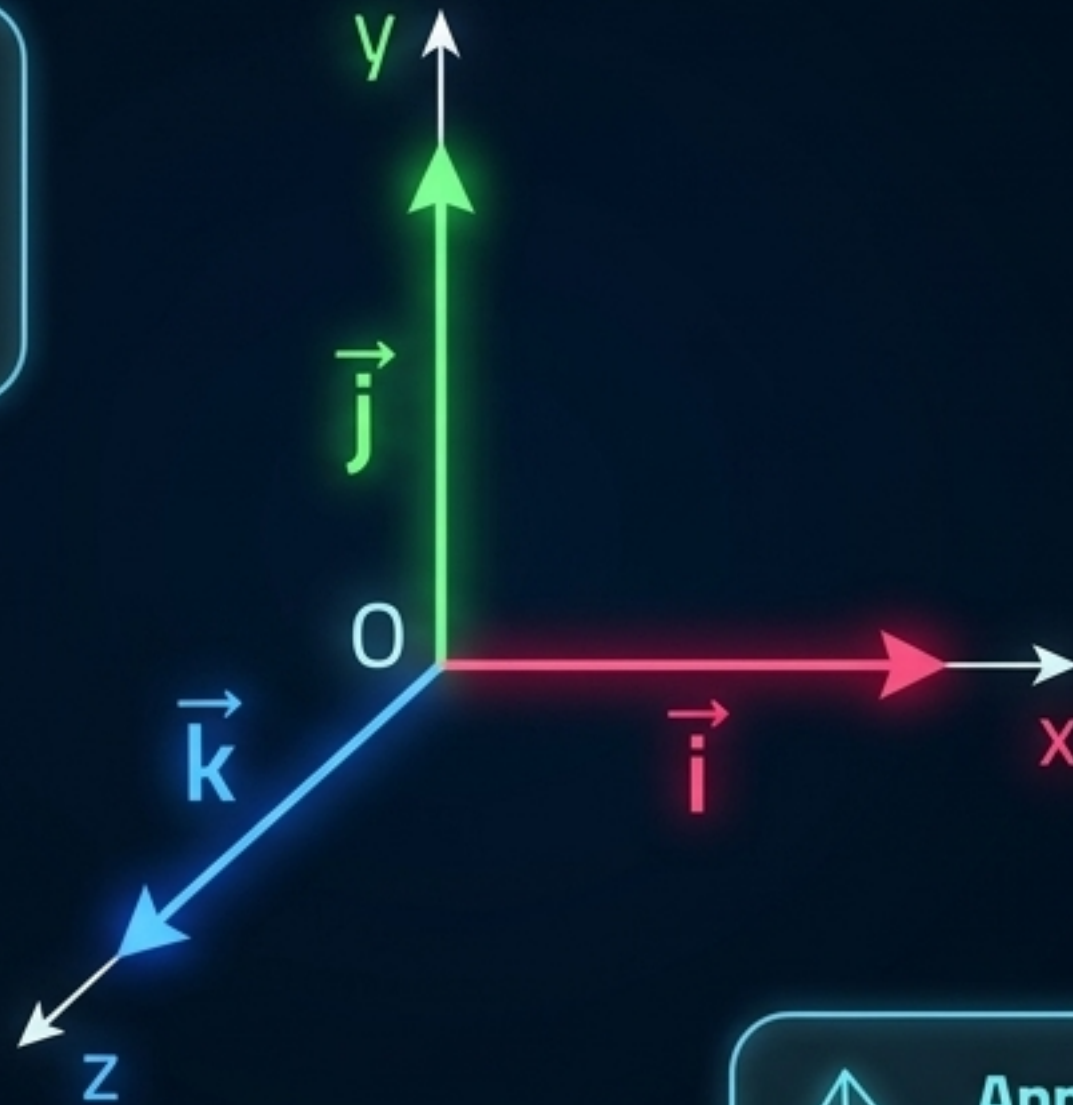
La Grille Numérique : Bases et Repères



La Base : Un triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires. Souvent orthonormale (orthogonaux + norme unitaire).



Le Repère : Une base attachée à un point d'origine spatial $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Note de Rigueur

Transition décisive de la géométrie pure (les formes) vers l'algèbre vectorielle (les nombres).



Application : Tout tétraèdre ABCD détermine naturellement un repère de l'espace avec $(A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$.

Anatomie Éclatée du Repère : Lire les Coordonnées

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ implique } M(x, y, z)$$

Plan (yOz) : Le mur latéral.
Tous les points où $x = 0$.

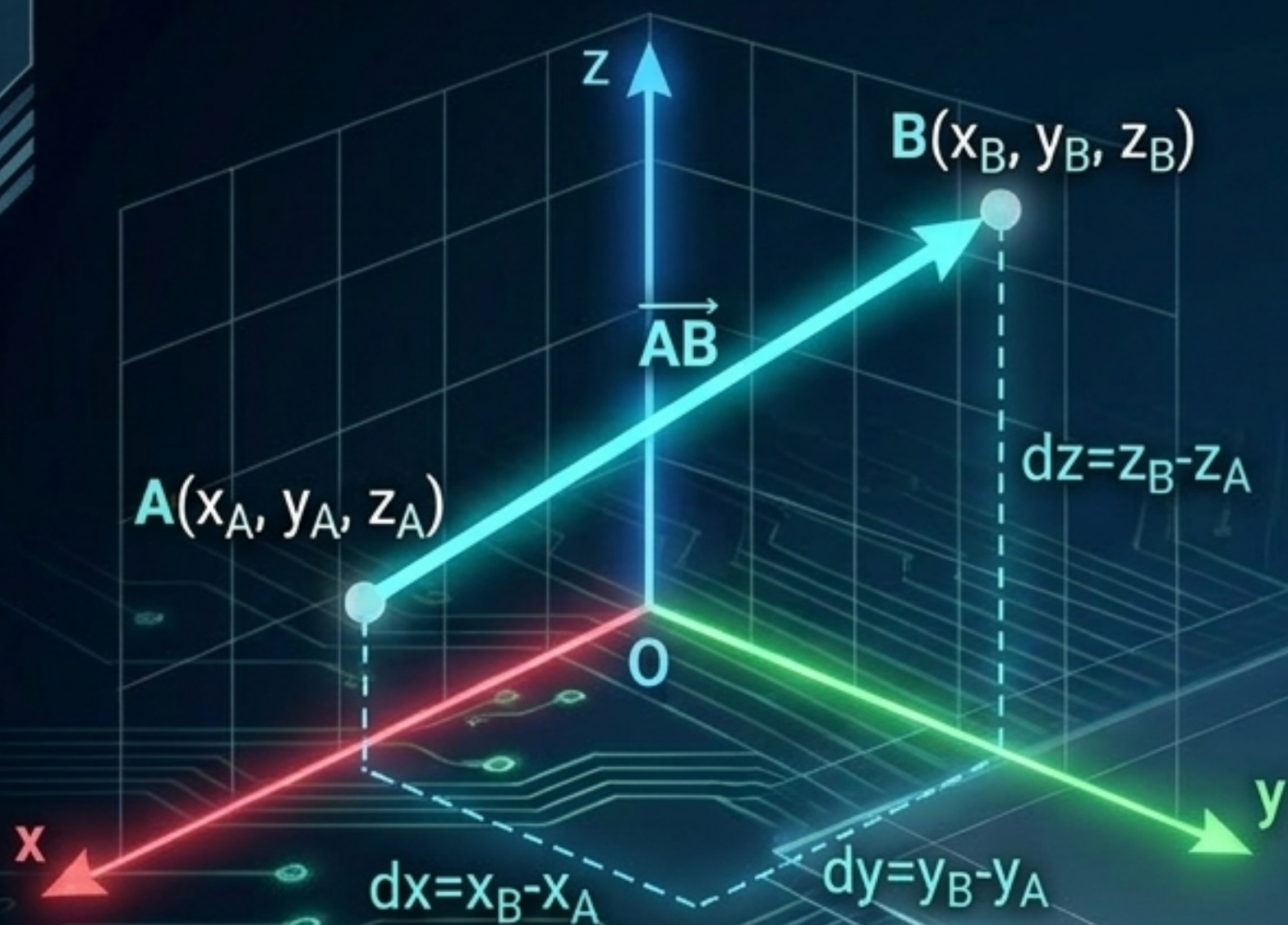
Plan (zOx) : Le mur de fond.
Tous les points où $y = 0$.

Plan (xOy) : L'empreinte au sol.
Tous les points où $z = 0$.

Note de Rigueur

Les axes eux-mêmes sont les arêtes d'intersection de ces plans (ex : Axe des abscisses (Ox) ssi $y=0$ ET $z=0$).

Algèbre Spatiale : Le Moteur de Calcul



Operations Panel

Le Moteur Algébrique :

Vecteur \vec{AB} :
 $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

Addition :
 $\vec{u} + \vec{u}' = (x+x', y+y', z+z')$

Multiplication :
 $k \cdot \vec{u} = (kx, ky, kz)$

Égalité : $\vec{u} = \vec{u}'$
ssi $(x=x' \text{ ET } y=y' \text{ ET } z=z')$

Note de Rigueur

Le Vecteur Nul en
Algèbre : $\vec{u} = \mathbf{0}$ ssi
 $x=0$ ET $y=0$ ET $z=0$.

Une combinaison
linéaire se calcule
simplement ligne par
ligne.

L'Équilibre : Gravité et Barycentres



Définition (Équation d'Or) :

$$\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{\mathbf{G}_A} + \mathbf{b} \cdot \overrightarrow{\mathbf{G}_B} = \mathbf{0}$$

(À condition que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ n'est pas nul)

Propriété de Réduction (Leibniz) :

Pour tout point M de l'espace :

$$\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}_A} + \mathbf{b} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}_B} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \overrightarrow{\mathbf{M}_G}$$

Note de Rigueur

Milieu : Si $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, G est le milieu exact géométrique (Iso-barycentre).

$$\mathbf{M}_A + \mathbf{M}_B = 2\mathbf{M}_G$$

Le Rayon de la Sphère :
L'équation

$$\|\mathbf{3M}_A - 2\mathbf{M}_B\| = \overline{\mathbf{AB}}$$

se réduit

instantanément à

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{AB}$$

L'ensemble des points est la sphère de centre G et de rayon AB.

Synthèse : La Maîtrise de l'Espace

La Physique



La Structure



La Fondation



La Brique



La Logique Fractale :

La géométrie 3D est une pure extension algorithmique de la 2D.

La Traduction :

Le Repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est le traducteur universel entre la forme physique et la matrice algébrique (x, y, z) .

La Simplification :

Des outils comme la relation de Chasles et la fonction de Leibniz sont des algorithmes de réduction de complexité pour résoudre l'espace.

Note de Rigueur

Fin du Chapitre.

Prochaine étape structurelle : L'orthogonalité et le produit scalaire (Mes angles exacts de notre architecture).