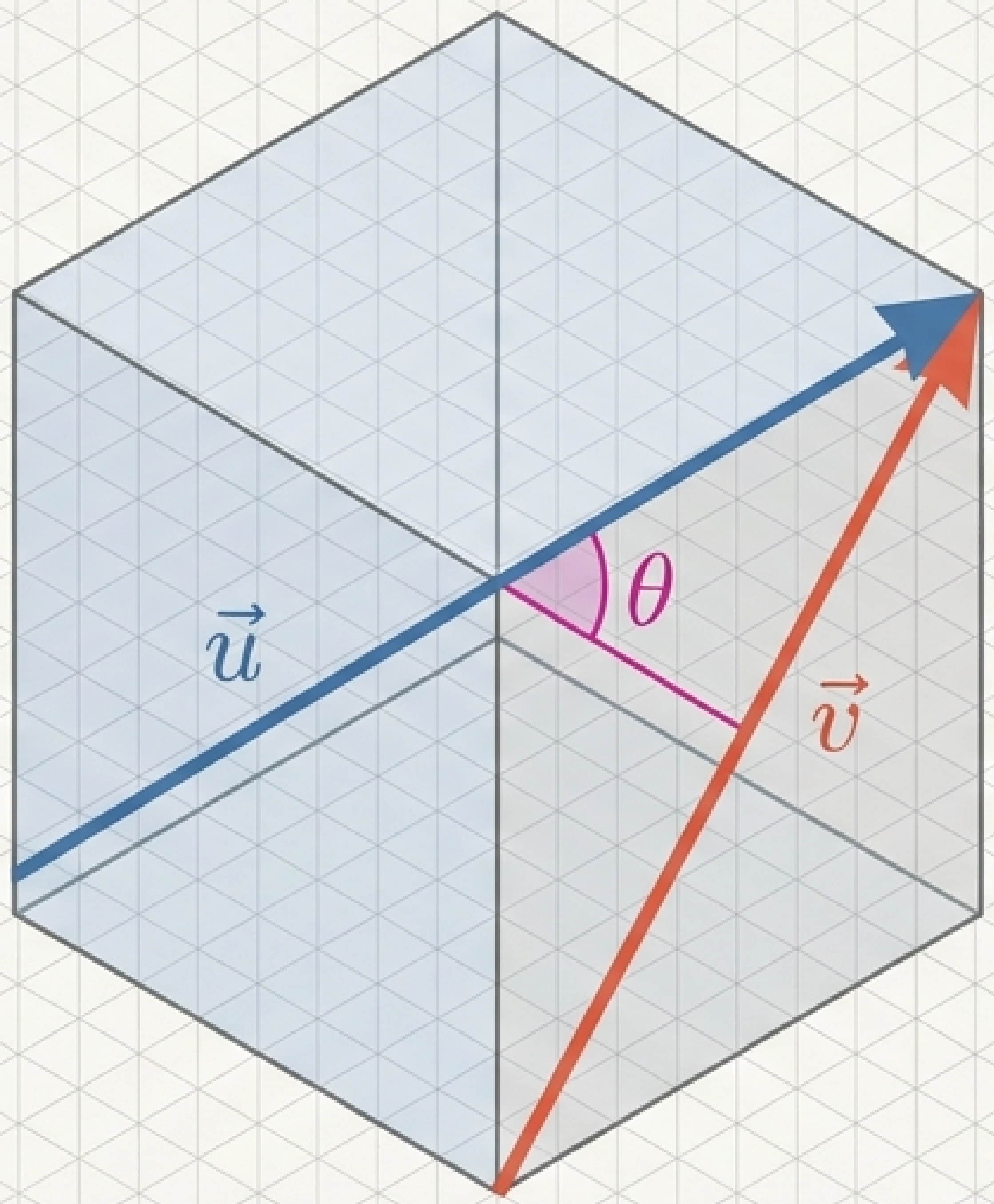
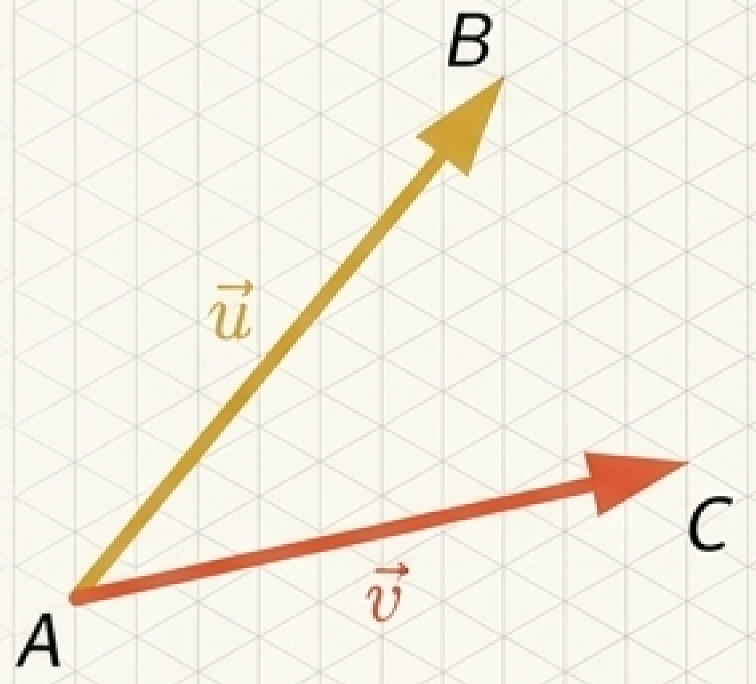
Le Produit Scalaire dans l'Espace

De la physique des forces à la géométrie euclidienne : le guide complet

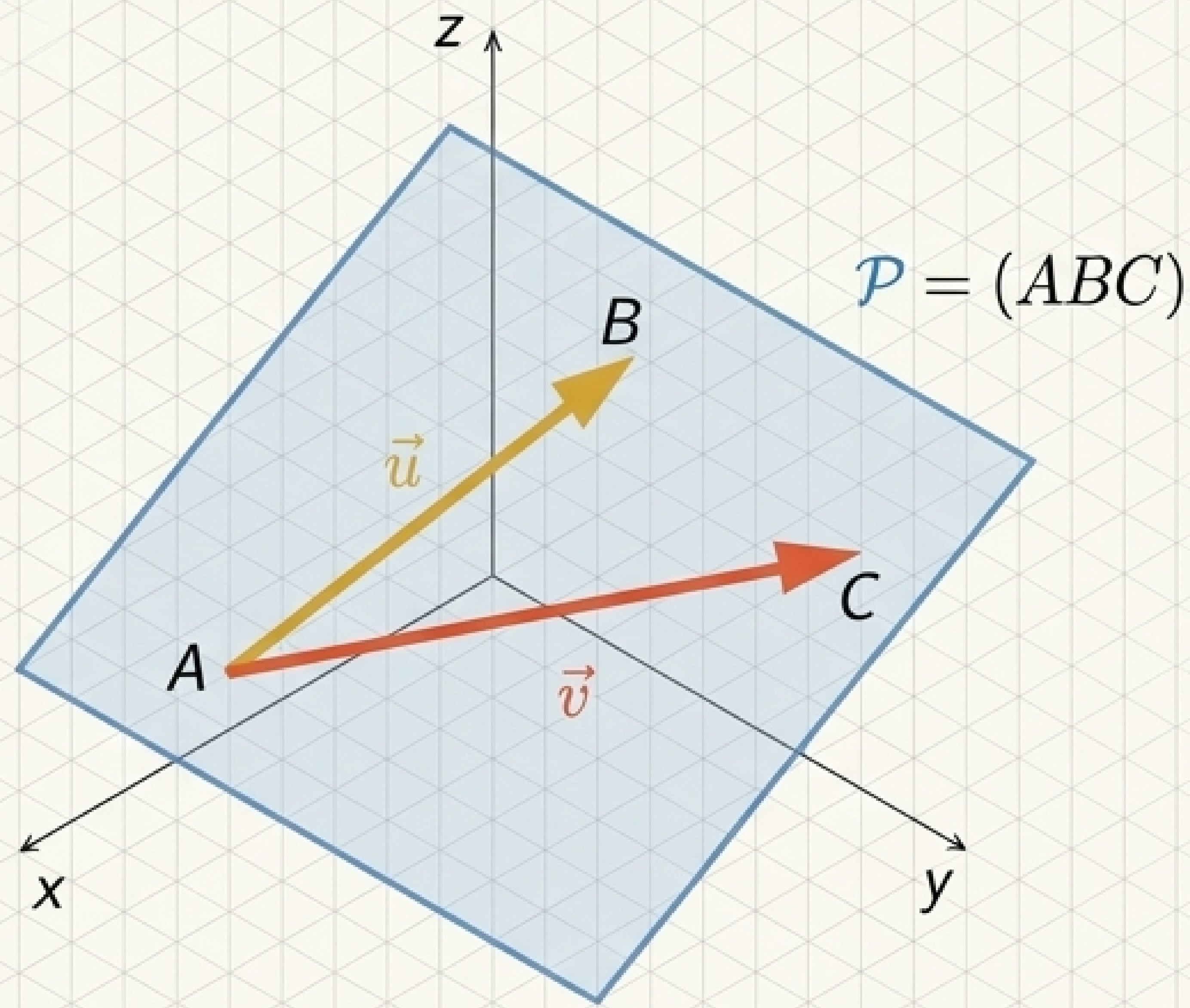


Un outil modélisant le travail d'une force, initié par les physiciens J. Gibbs et W. Hamilton, et étendu aux espaces euclidiens par H. Grassmann.

Classe de Première : Le Plan



Terminale : L'Espace

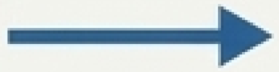


Définition 17.1 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B, C trois points non alignés tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, calculé dans le plan $\mathcal{P} = (ABC)$.

Indépendance Spatiale (Prop 17.1) : La définition est indépendante du choix des représentants et du plan.

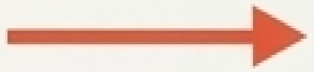
Les 7 Lois Fondamentales
(Proposition 17.2)

Carré Scalaire



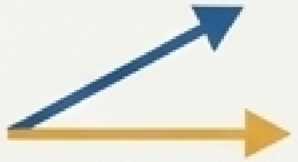
$$\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

Distance



$$\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$$

Théorème d’Al-Kashi

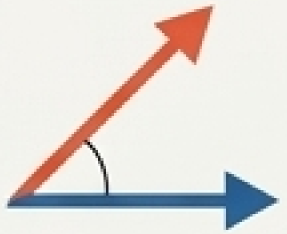


$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

Polarisation (Normes)

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

Formule du Cosinus

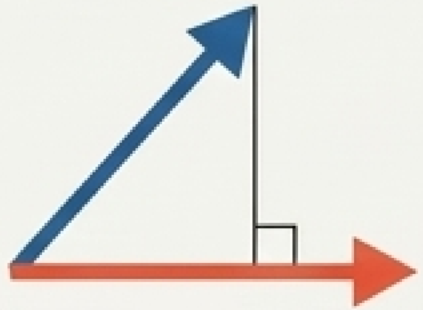


$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

Vecteurs Purs

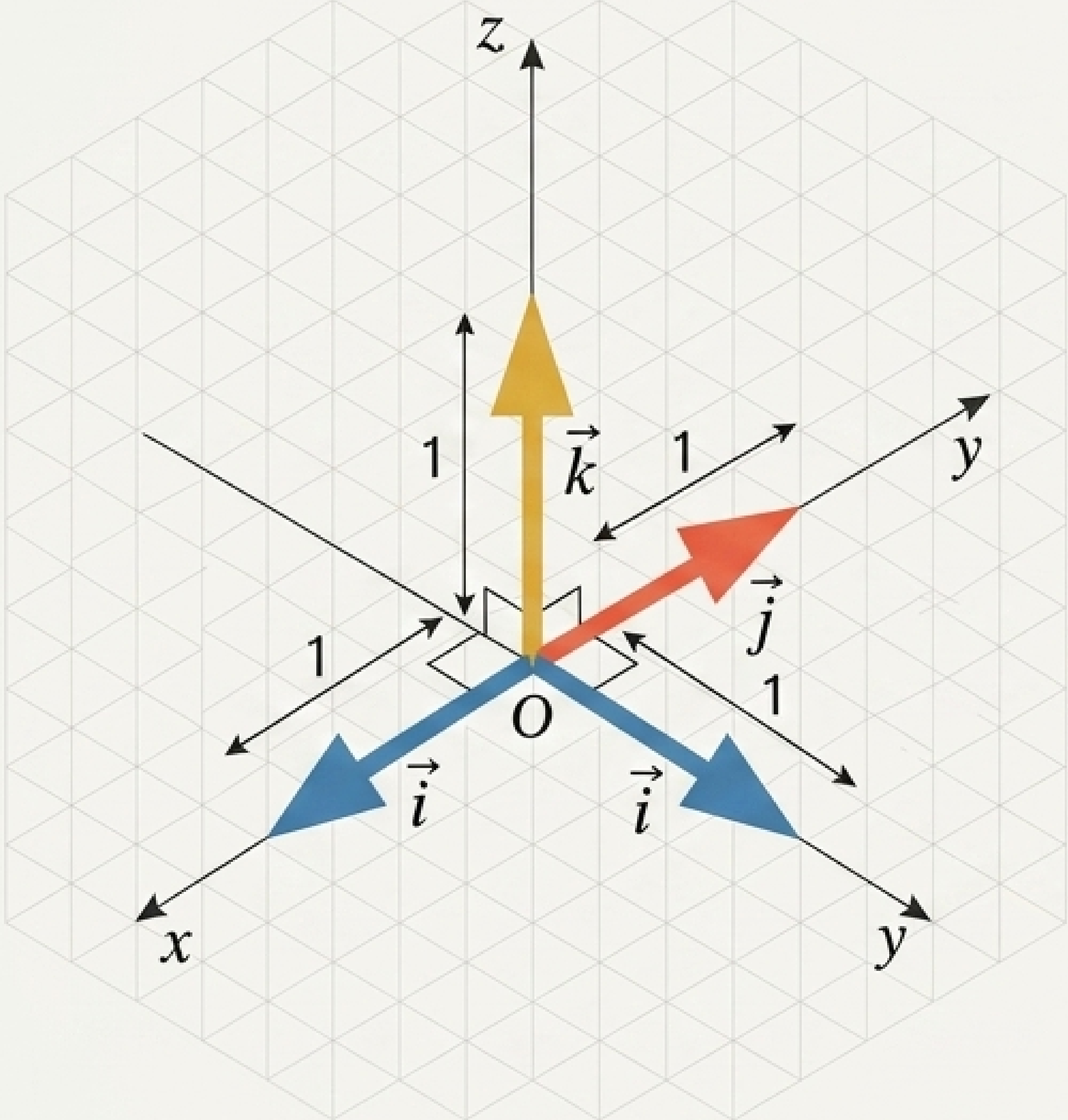
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$

Projection Orthogonale



Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB),
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$$

L'Expression Analytique : Le Moteur de Calcul



Définition 17.2 : Base Orthonormale

Unité et orthogonalité requises : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$.

Proposition 17.5 : Expression Analytique

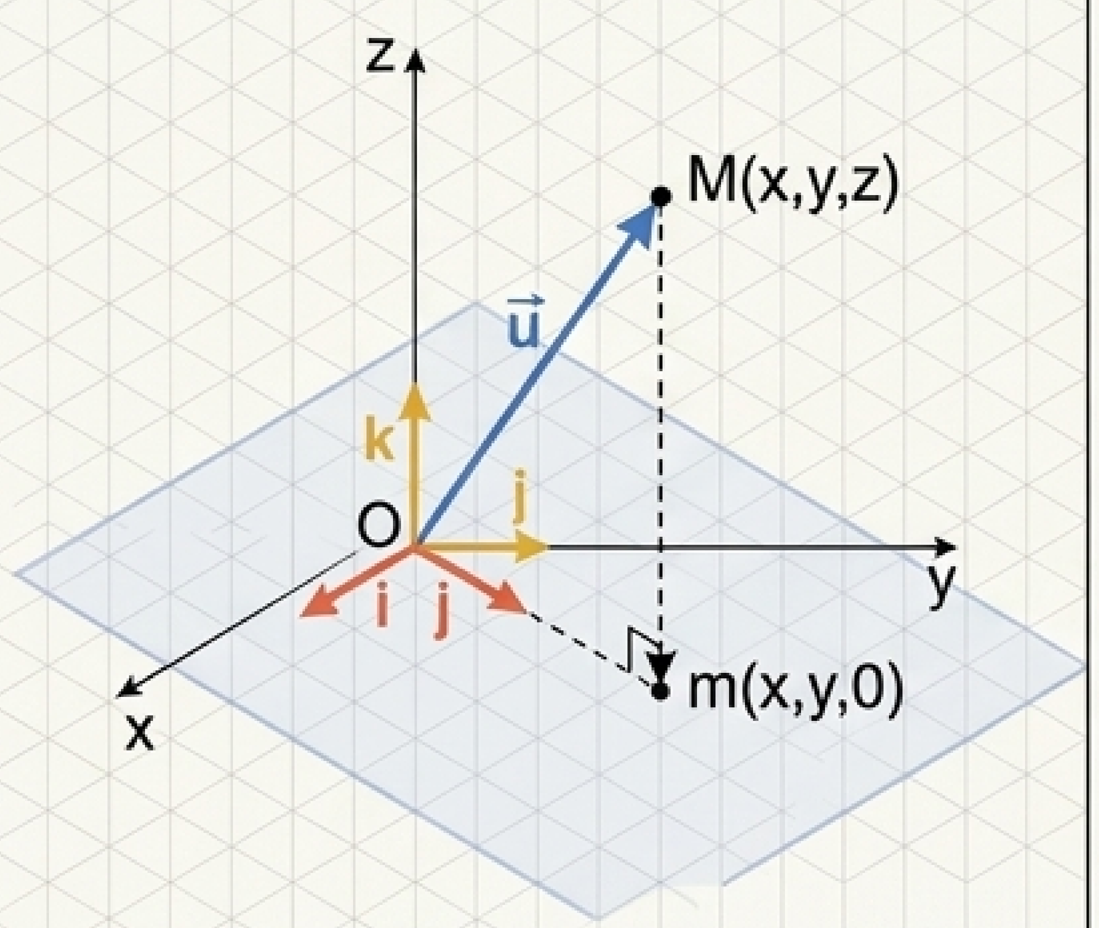
Si $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$, alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

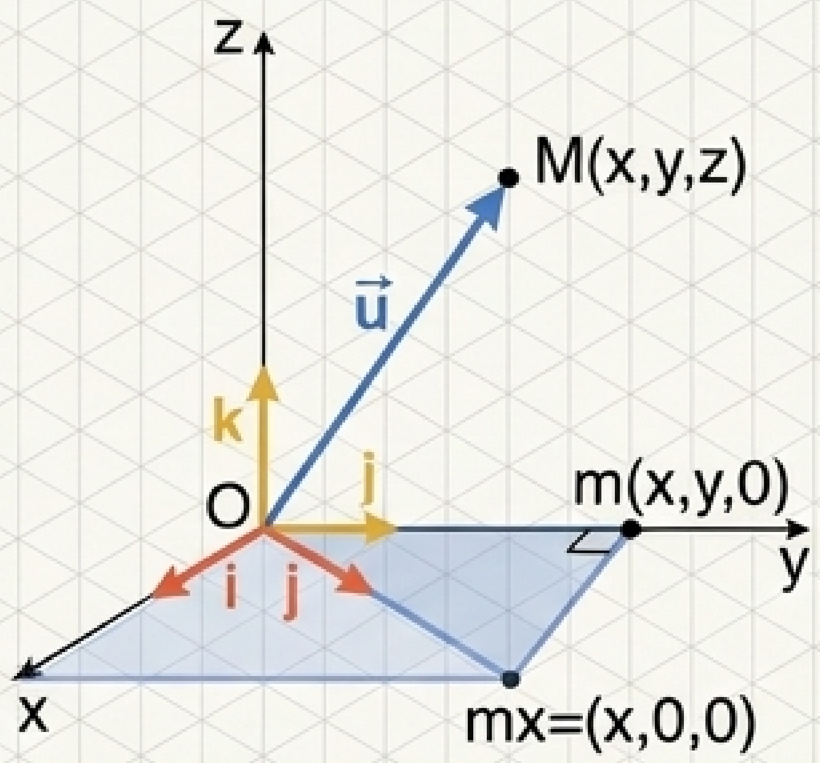
Corollaire 17.6 : Extraction des coordonnées via le produit scalaire : $x = \vec{u}\cdot\vec{i}$, $y = \vec{u}\cdot\vec{j}$, $z = \vec{u}\cdot\vec{k}$.

La Norme et la Distance Spatiale (Visualisation de la preuve)

Étape 1 : La Projection

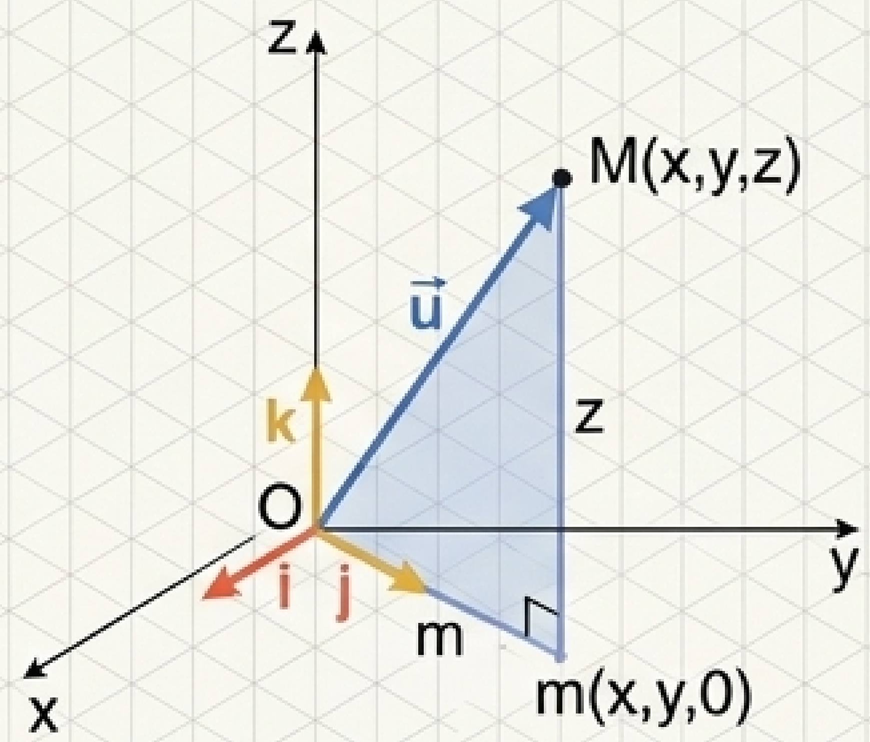


Étape 2 : Pythagore 2D



$$Om^2 = x^2 + y^2$$

Étape 3 : Pythagore 3D



$$OM^2 = Om^2 + mM^2 \Rightarrow \|\vec{u}\|^2 = (x^2 + y^2) + z^2$$

Corollaire 17.4 : Formules Finales

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

L'Algèbre de l'Espace : Bilinéarité et Symétrie

Proposition 17.7 (Symétrie)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

(Commutativité parfaite)

Proposition 17.8 (Bilinéarité)

Sub-section 1

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

(Distribution)

Sub-section 2

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

(Mise à l'échelle scalaire)

Corollaire 17.9 Combinant ces règles : $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{w})$ et $(-\vec{u})^2 = \vec{u}^2$.

Identités Remarquables & Polarisation

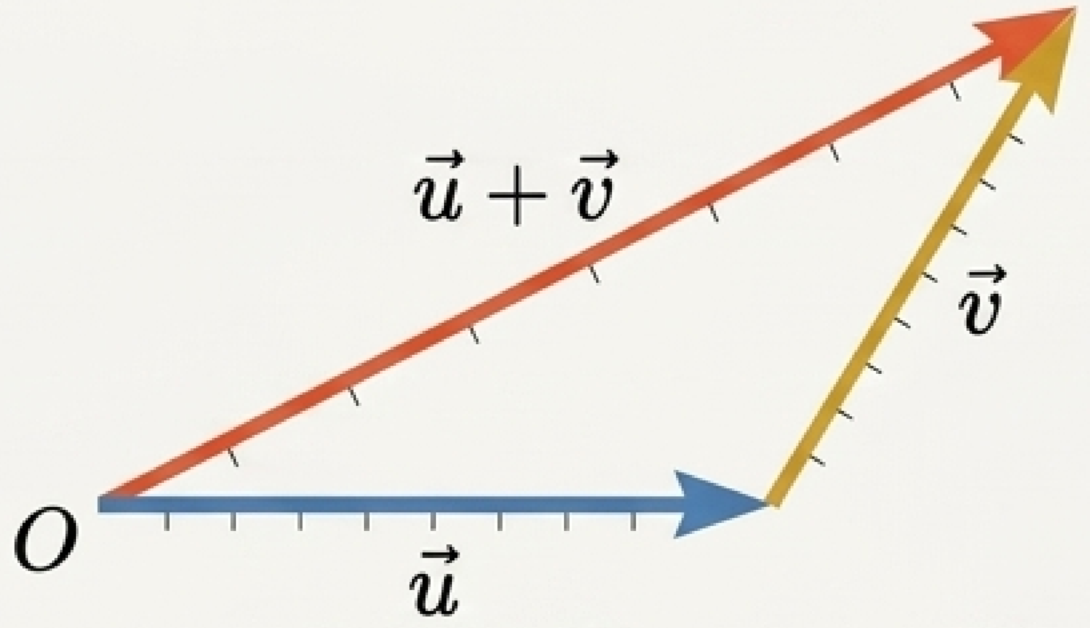
Proposition 17.10

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

L'Identité de Polarisation

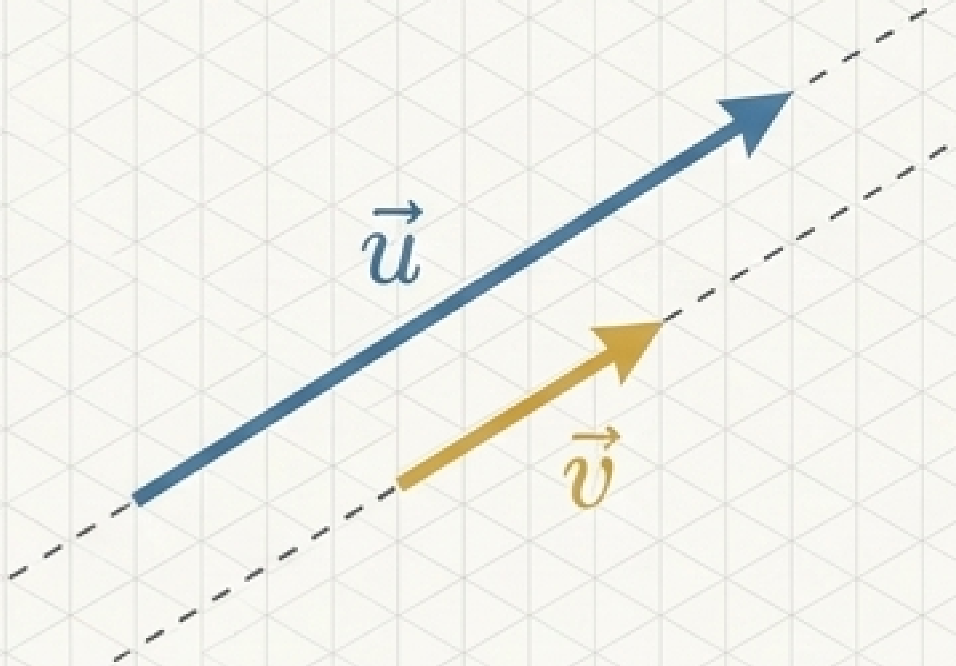


Permet d'exprimer le produit scalaire uniquement à partir des normes (distances).

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

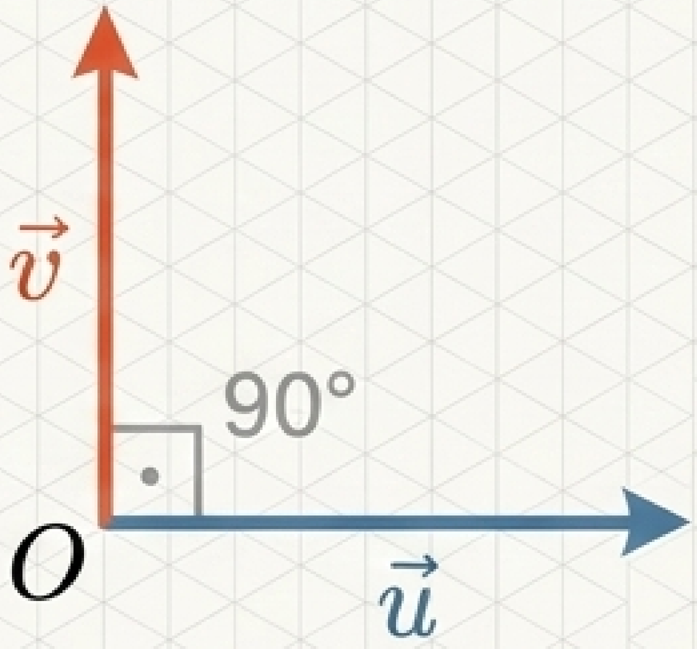
Matrice de Diagnostic : Colinéarité vs Orthogonalité

Colinéaires (Prop 17.11)



Condition : Vecteurs parallèles.
Calculations : Même sens : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ Sens contraire : $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

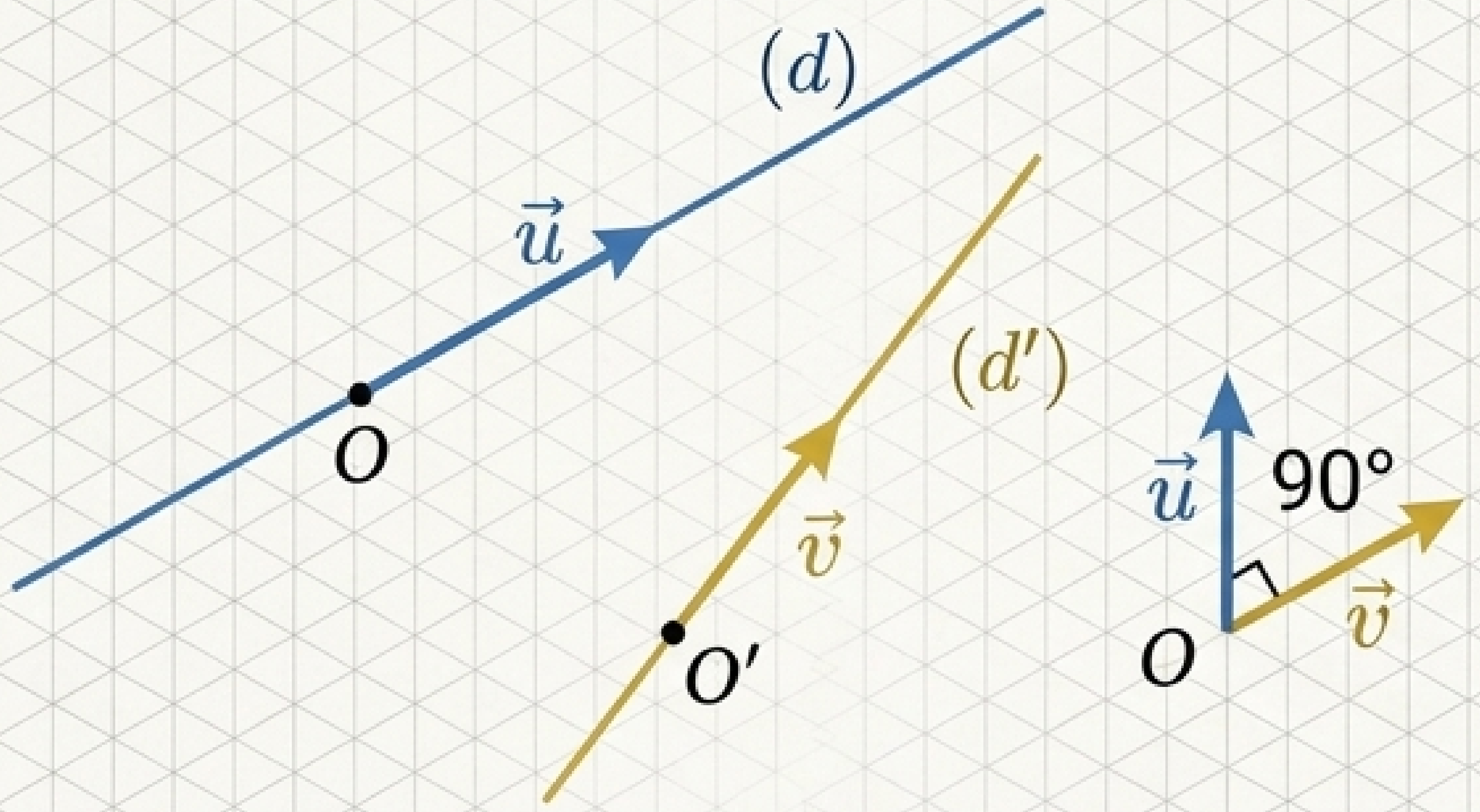
Orthogonaux (Def 17.3, Prop 17.12)



Condition : Vecteurs perpendiculaires (noté $\vec{u} \perp \vec{v}$).
Calculations : Calcul géométrique : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ Condition analytique : $xx' + yy' + zz' = 0$

L'Orthogonalité des Droites et des Plans

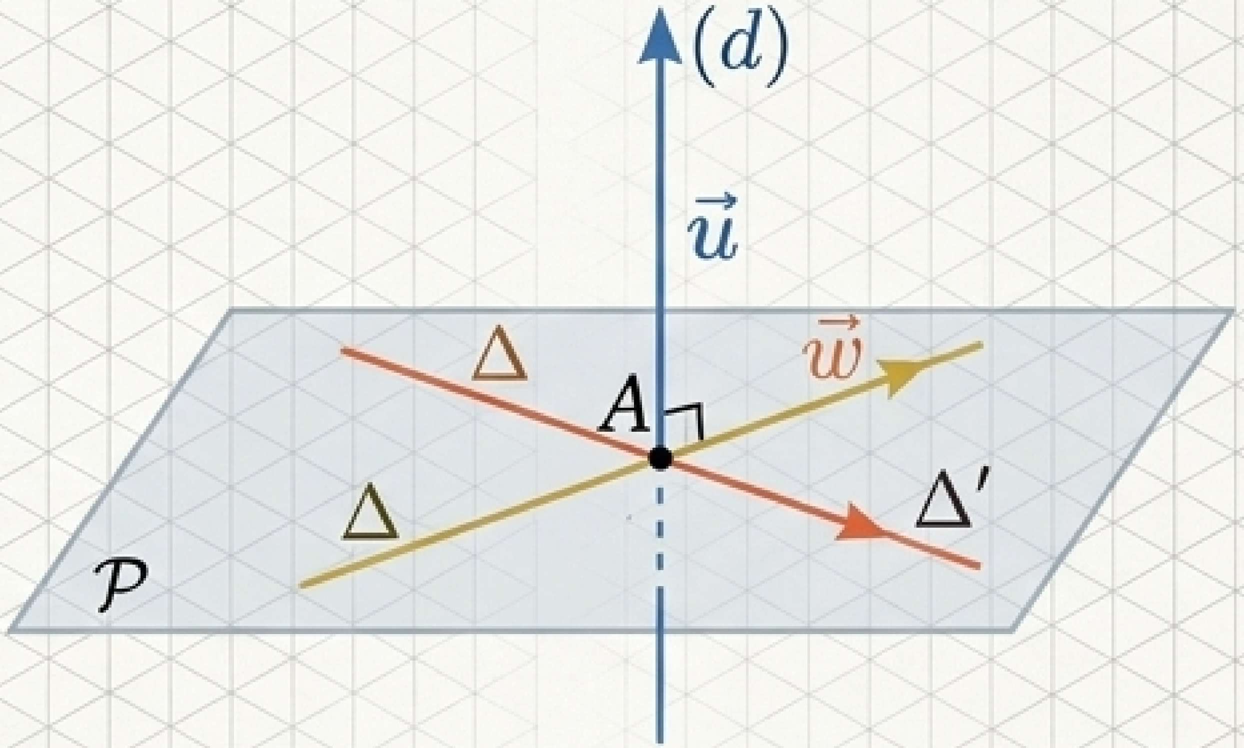
Modèle 1 : Droites (Def 17.4)



$$(d) \perp (d') \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

(Les droites ne sont pas nécessairement sécantes ni coplanaires)

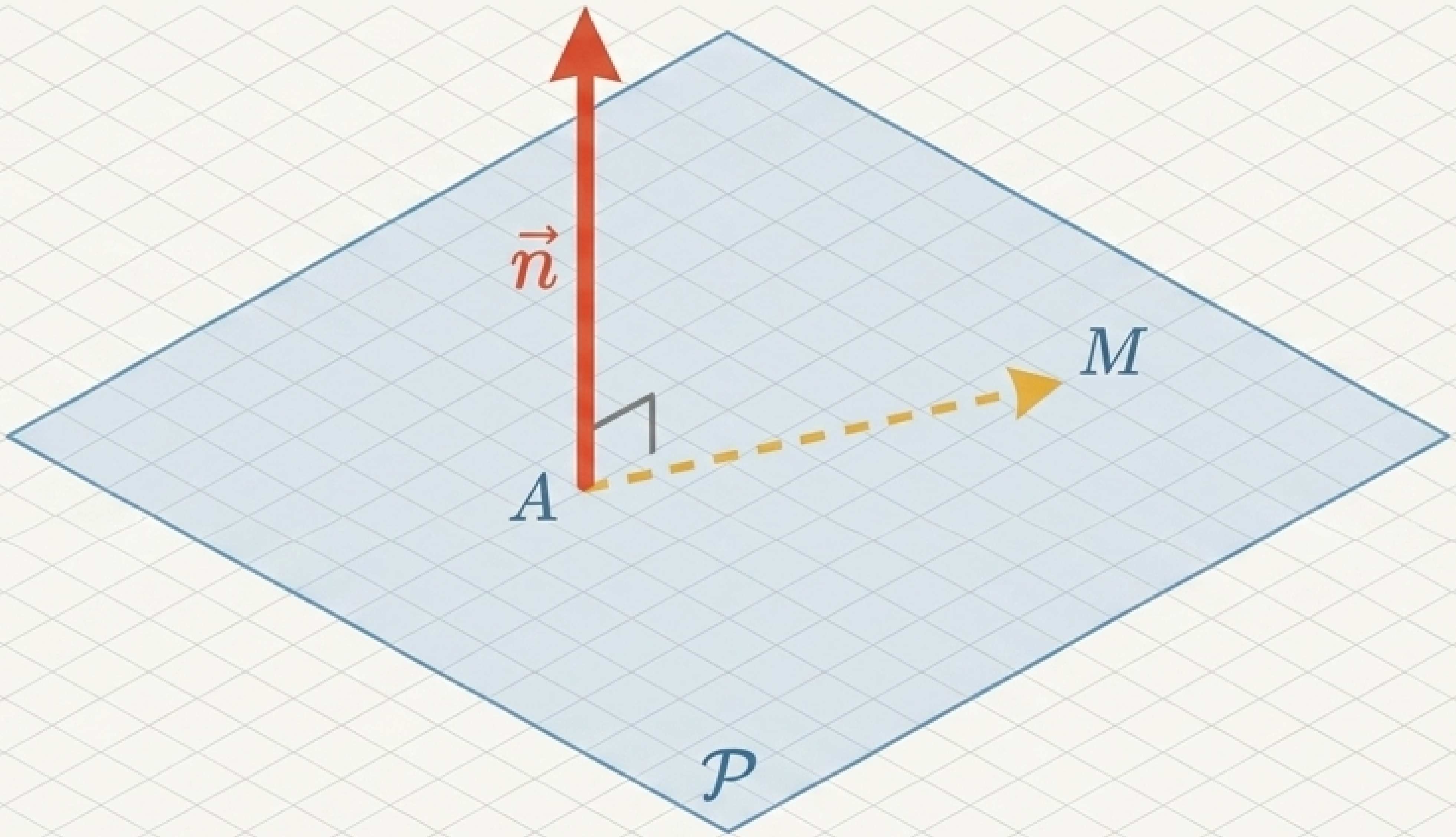
Modèle 2 : Droite et Plan (Prop 17.13)



Pour qu'une droite soit orthogonale à un plan, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ET $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

Le Vecteur Normal : L'ADN d'un Plan



Définition 17.6	Caractérisation Fondamentale (Proposition 17.14)
Un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ est normal au plan $\mathcal{P}$ s'il est le vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$. Tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est également normal à $\mathcal{P}$.	Un plan est défini de manière unique par un point A et un vecteur normal $\vec{n}$. $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Étude de Cas : Le Plan Médiateur

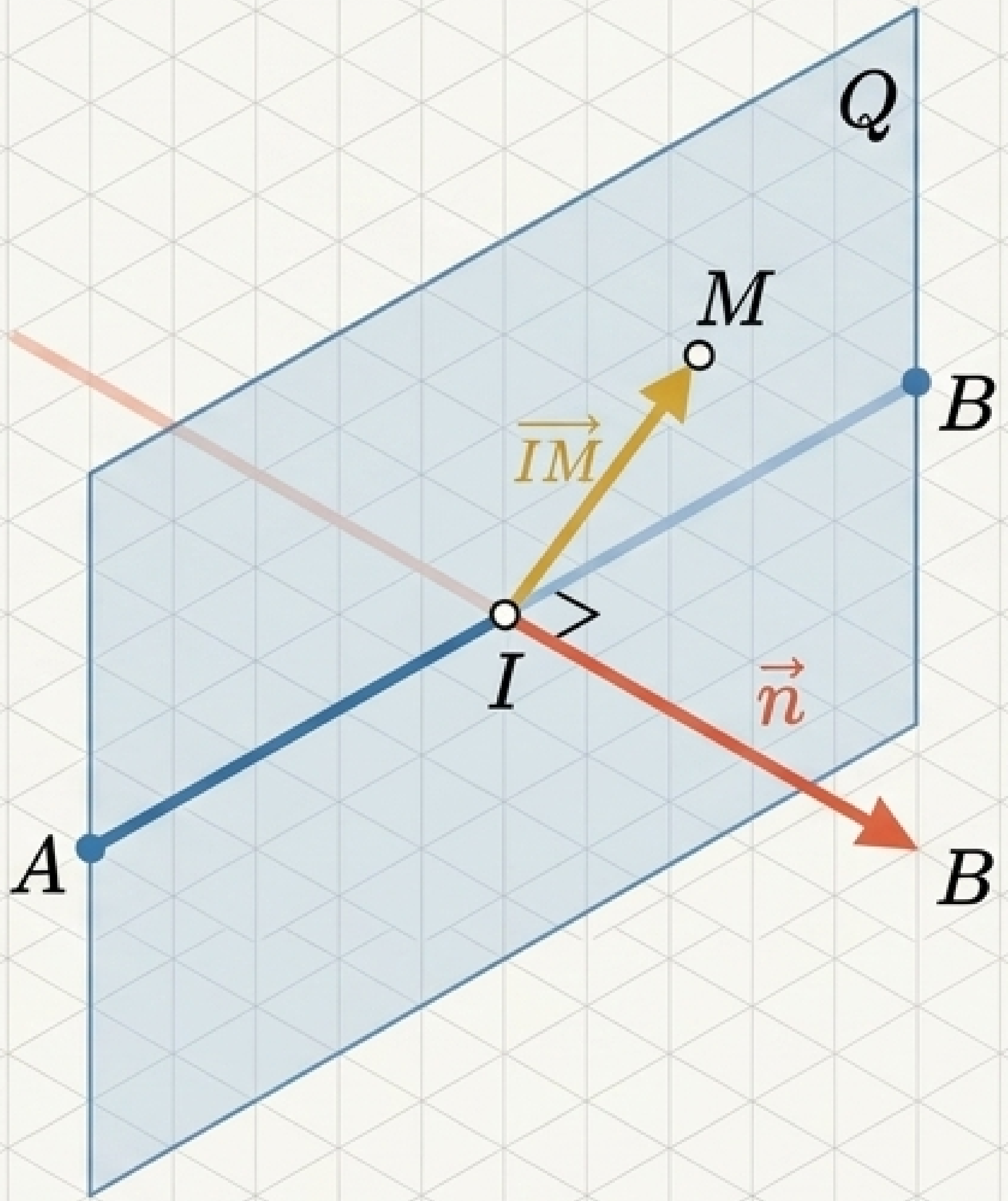
Trouver l'ensemble des points M équidistants de A et B ($MA = MB$). I est le milieu de $[AB]$.

Équidistance
$$MA^2 - MB^2 = 0$$

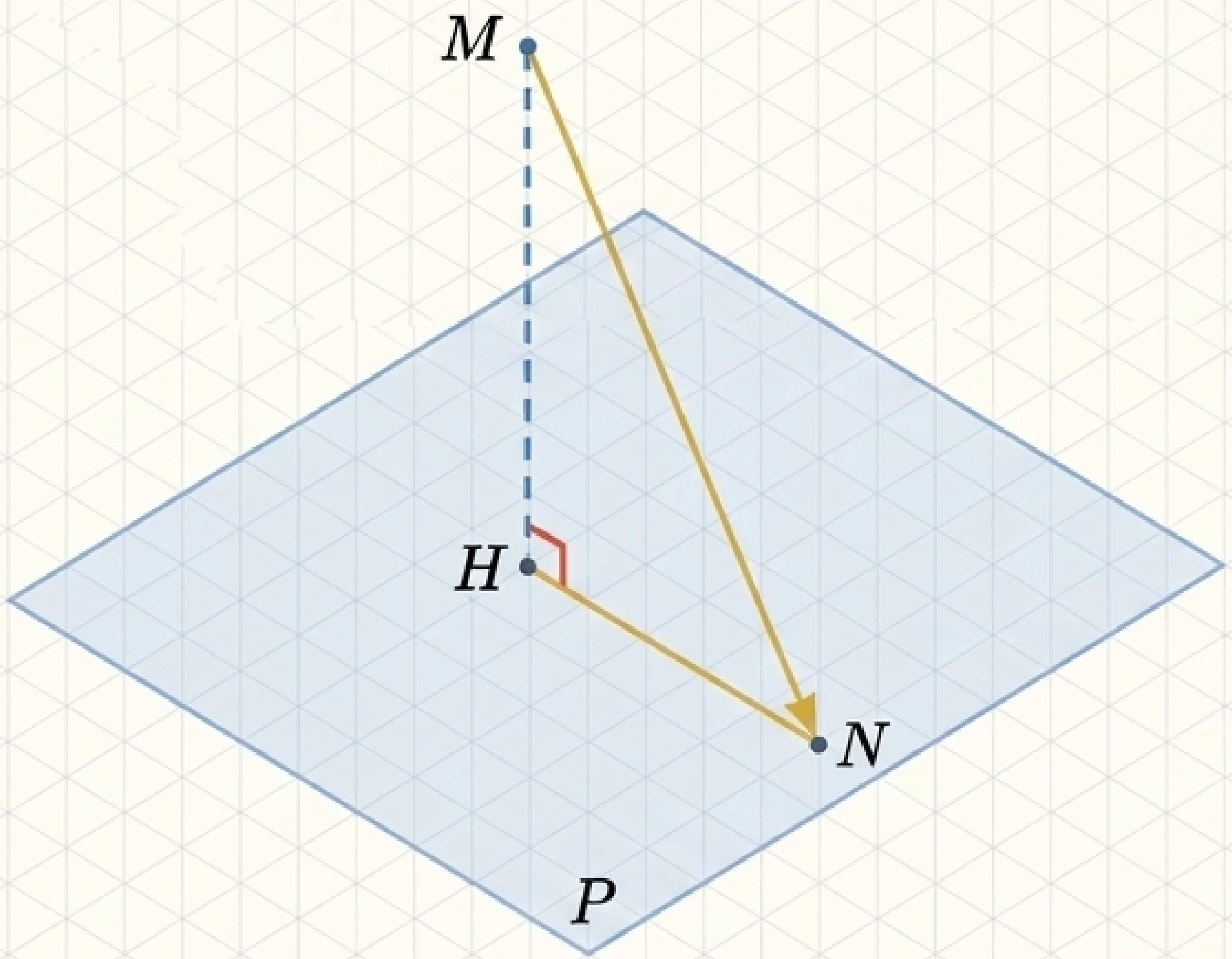
Vectorisation
$$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$$

Propriété du milieu
$$\overrightarrow{BA} \cdot (2\overrightarrow{MI}) = 0$$

Conclusion Analytique
$$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$



Distances et Projetés Orthogonaux



Définition 17.10

La distance de M au plan $\mathcal{P}$, notée $d(M, \mathcal{P})$, est la distance MH.

Preuve d'Optimalité (Prop 17.18)

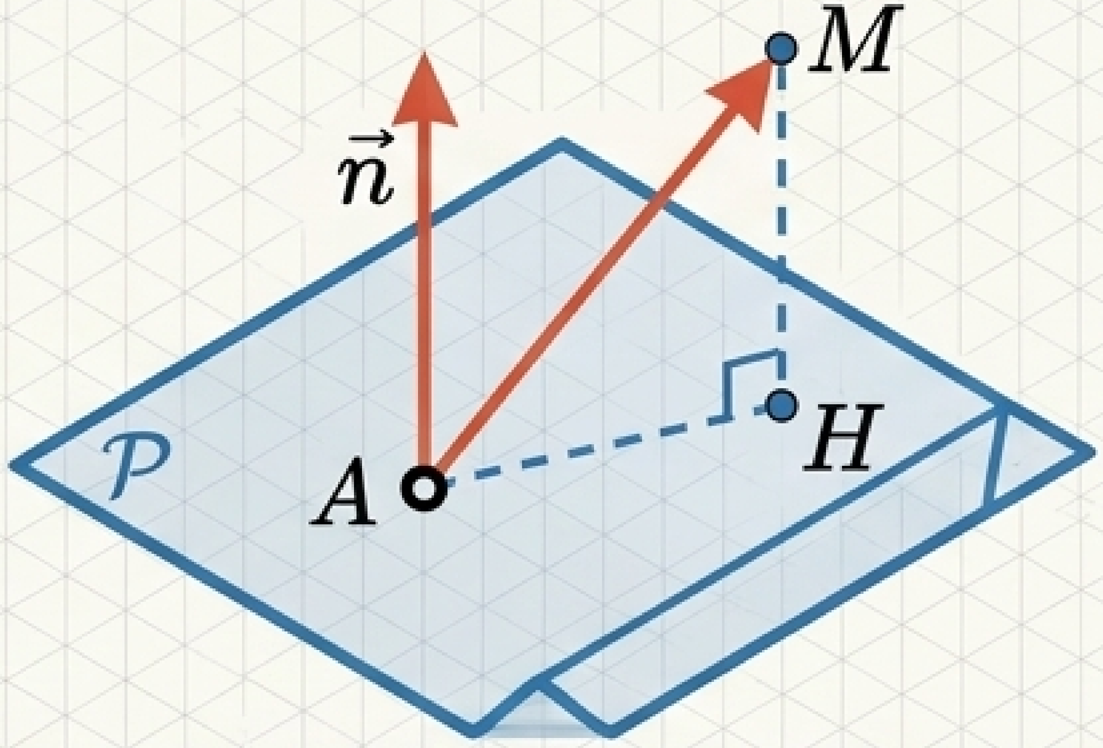
- Le triangle MHN est rectangle en H.
- Théorème de Pythagore : $MN^2 = MH^2 + HN^2$
- Donc $MN^2 \geq MH^2$, ce qui prouve que $MH \leq MN$.

Le projeté orthogonal réalise toujours la distance minimale absolue.

Calculer la Distance à un Plan (L'Équation Maîtresse)

Numérateur : Lié au volume/projection spatiale créé par M, A, et le vecteur normal.

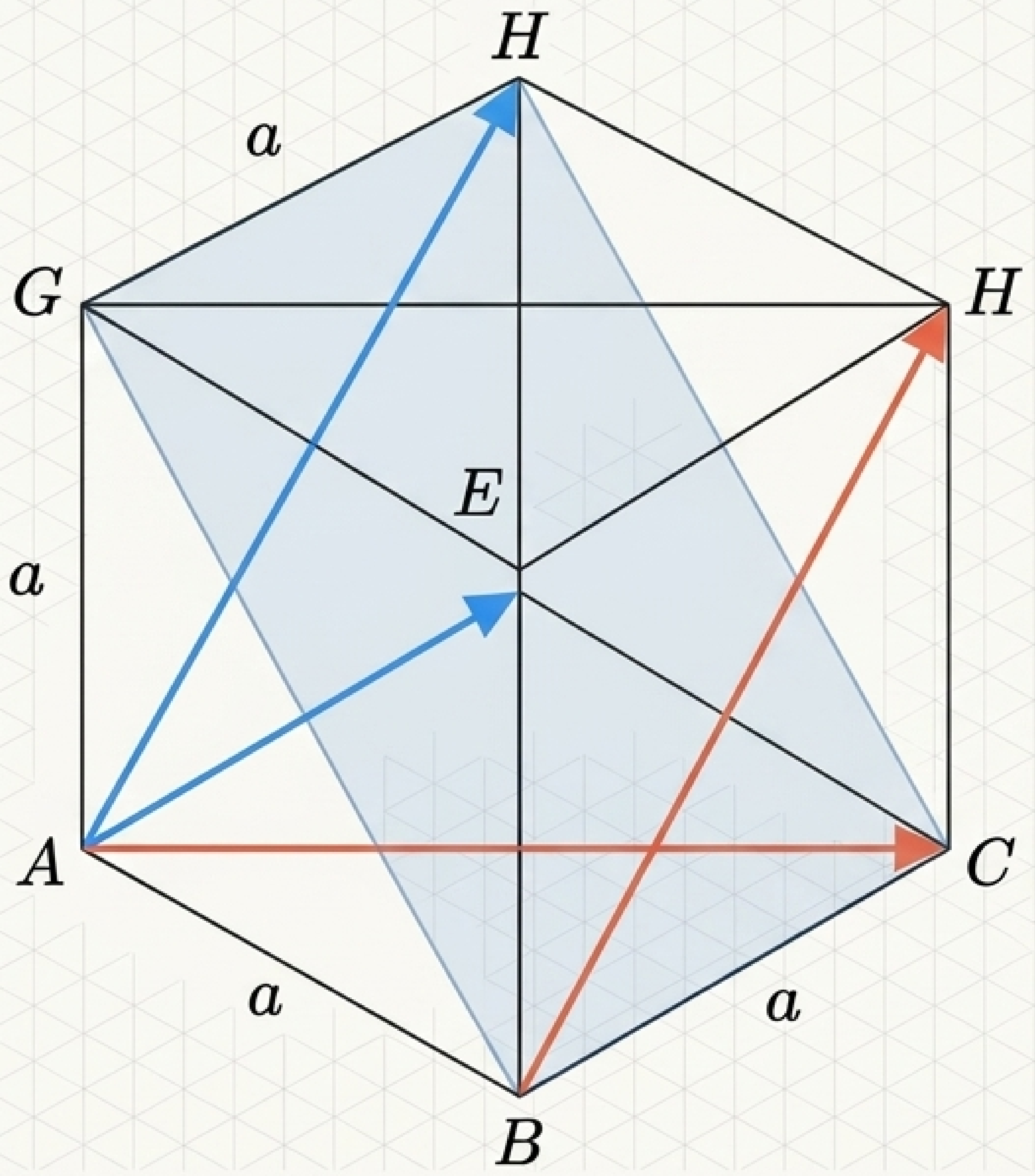
$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$



Dénominateur : Longueur du vecteur normal, mettant la projection à l'échelle de la distance réelle.

Contexte (Prop 17.19) : Fonctionne pour tout plan défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n} \neq \vec{0}$.

Synthèse : Le Produit Scalaire en Action



Application 1 : Calcul d'Angles (Ex 17.1)

Calcul de $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AG}$ dans le plan (AFG).

$AG = a\sqrt{3},\ AF = a\sqrt{2}.$

$\cos(\widehat{FAG}) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

Application 2 : Preuve d'Orthogonalité (Ex 17.3)

Prouver que la droite (AF) est orthogonale au plan (EBC).

Logique Spatiale : $(AF) \perp (EC)$ (via produit scalaire analytique nul) ET $(AF) \perp (EB)$ (configuration du cube).

Conclusion : Perpendiculaire à deux droites sécantes = orthogonale au plan. Space unlocked.