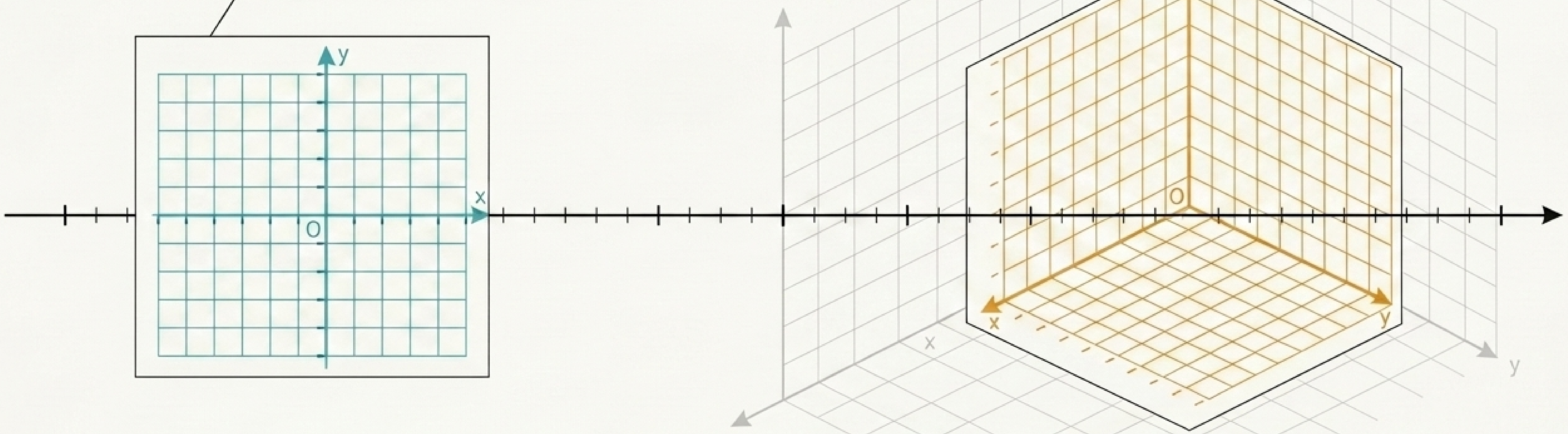
Chapitre 18 Géométrie Analytique dans l'Espace : Fondations

Origines (XVIIe siècle) : René Descartes.
L'invention du repérage à deux coordonnées.
La géométrie devient algébrique.

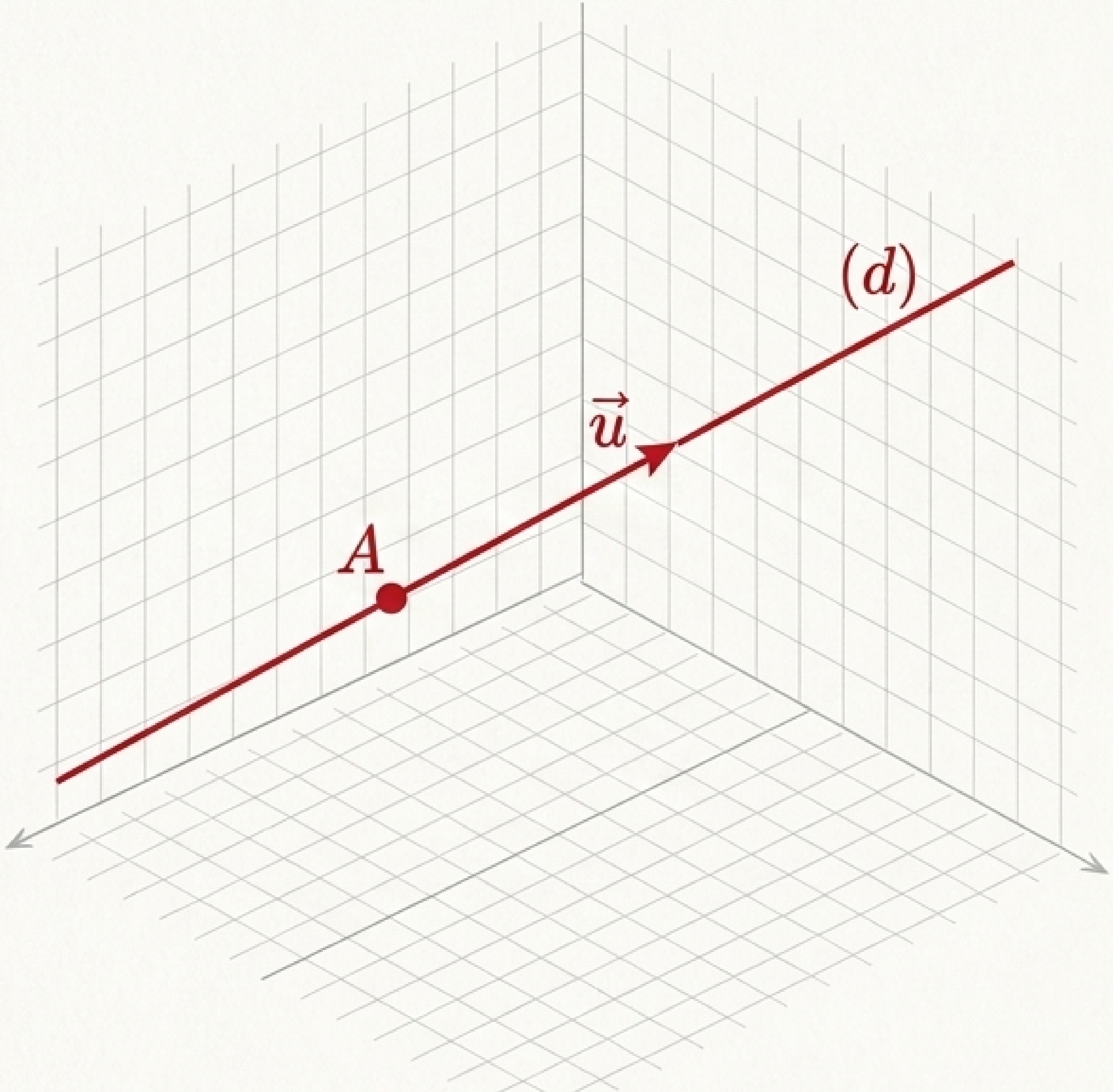
Expansion 3D (XVIIIe siècle) : Joseph-Louis Lagrange & Gaspard Monge.
Développement des équations de surfaces tridimensionnelles.



Espace Géométrique (Points / Parallélisme / Orthogonalité) $\Leftrightarrow$ **Calcul Algébrique** (Vecteurs / Coordonnées)

Le socle : Caractériser analytiquement la colinéarité, la coplanarité et l'orthogonalité via un repère orthonormal (**O ; i, j, k**).

La Droite : Représentation Paramétrique



Coordonnées du point $A \in (d)$

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Coordonnées du vecteur directeur $u \neq \vec{0}$

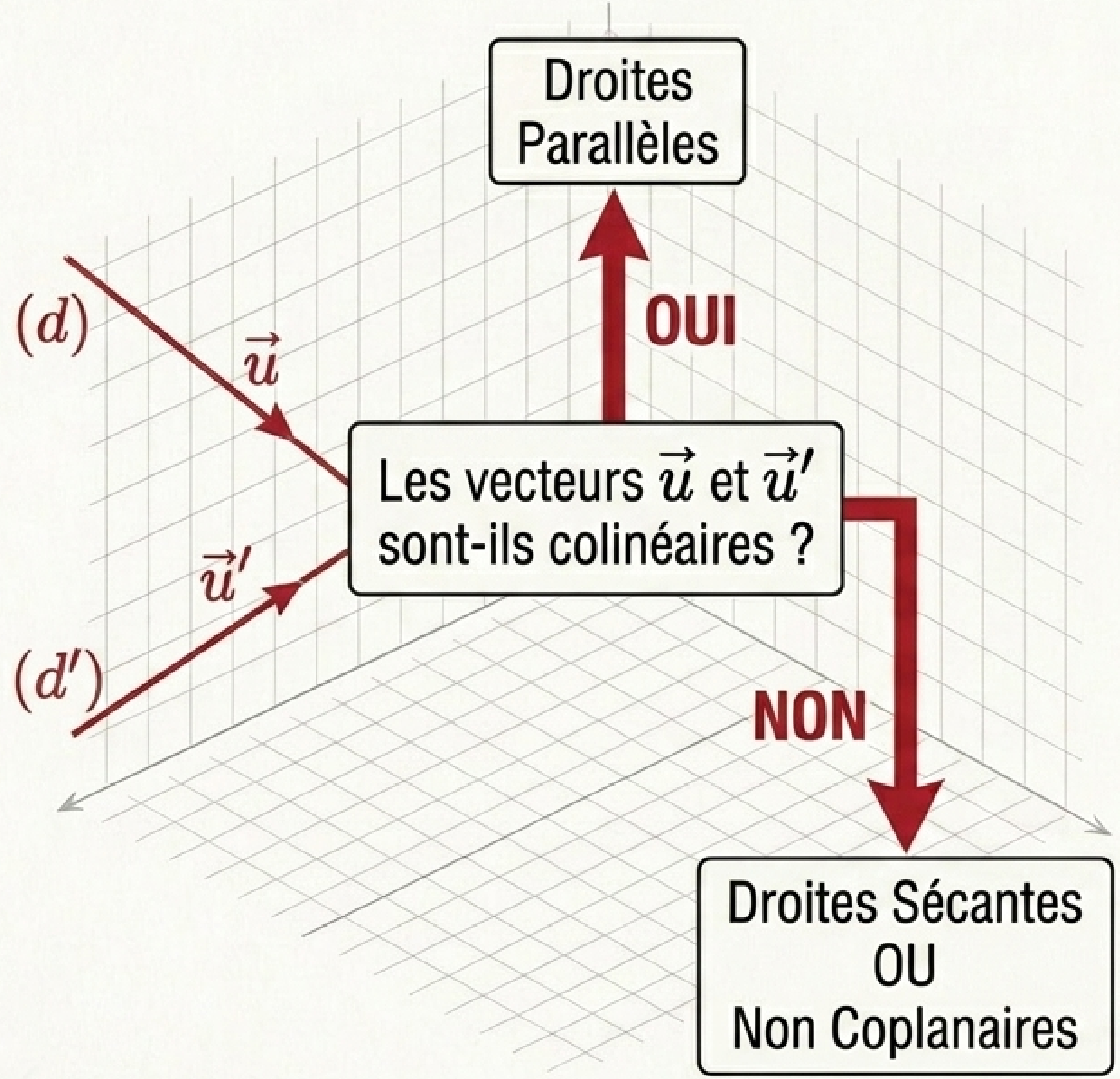
Paramètre réel

$$\left[\begin{array}{lll} t \in \mathbb{R} & \longrightarrow & \text{Droite entière} \\ t \in [0,1] & \longrightarrow & \text{Segment de droite} \\ t \in [0,+\infty[& \longrightarrow & \text{Demi-droite} \end{array}\right.$$

Exemple 18.1

$A(1,-1,2)$ et $B(0,1,-1)$. Vecteur $\overrightarrow{AB}(-1,2,-3)$.
Système : $x = 1-t, y = -1+2t, z = 2-3t$.
Test $C(2,-3,5) \rightarrow t{=}-1$ (Appartient).
Test $D(2/3,1/3,2) \rightarrow$ Pas de solution (N'appartient pas).

Positions Relatives de Deux Droites



Exemple 18.2

$$(d) : \vec{u}(2, -1, 1) \mid (d_\lambda) : \vec{u}_\lambda(1, -1, \lambda)$$

Vecteurs non colinéaires ($2/1 \neq -1/-1$).

Égalisation des systèmes paramétriques :

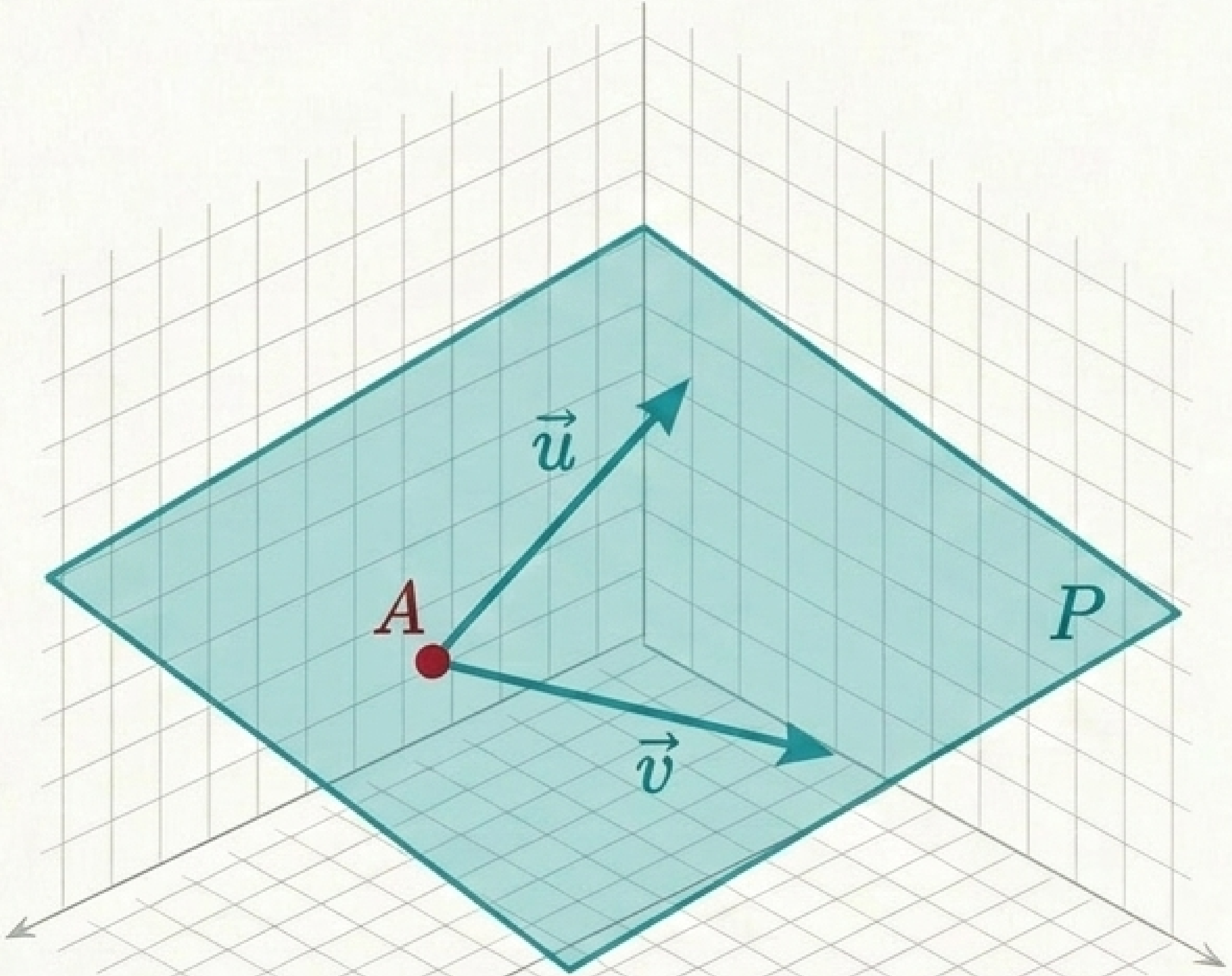
$$\begin{cases} -3 + 2t = s \\ 2 - t = 1 - s \\ 1 + t = -1 + \lambda s \end{cases}$$

Résolution partielle : $t = 2$, $s = 1$.

Le Pivot λ :

- Si $\lambda = 4$: Système résolu. Sécantes au point (1,0,3).
- Si $\lambda \neq 4$: Aucune solution. Droites non coplanaires.

Le Plan : Représentation Paramétrique

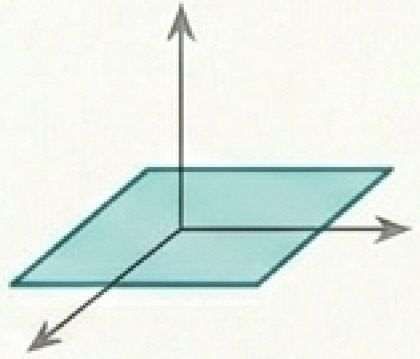
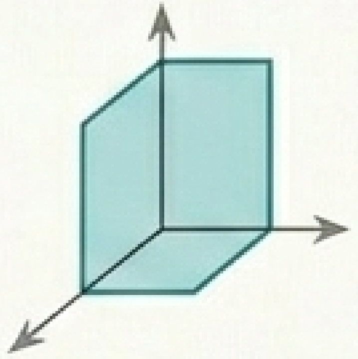
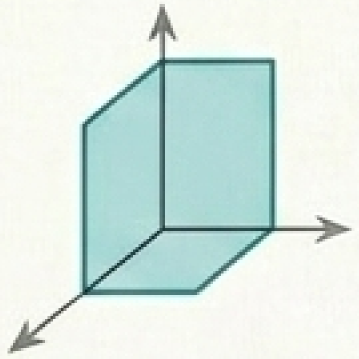


Plan (*i* noliees, $\mathbb{P}$)

$$\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases}$$

Double paramètre
$(t, t') \in \mathbb{R}^2$

Plans de coordonnées :

Plan (xOy) : z=0	Plan (yOz) : x=0	Plan (xOz) : y=0
		
x=t, y=t', z=0	x=0, y=t, z=t'	x=t, y=0, z=t'

Le Plan : Équation Cartésienne

$$\boxed{ax + by + cz} + \boxed{d} = 0$$

Coordonnées du vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ (Non tous nuls)

Constante d'ajustement : $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$

Exemple 18.4

Point $A(1,2,-1)$, normal $\vec{n}(1,2,3)$.

Méthode 1 : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow (x-1)1+(y-2)2+(z+1)3 = 0$

Méthode 2 : $1x + 2y + 3z + d = 0$.

Insertion de $A \rightarrow 1+4-3+d = 0 \rightarrow d = -2$

Résultat : $x + 2y + 3z - 2 = 0$

Logique de Preuve

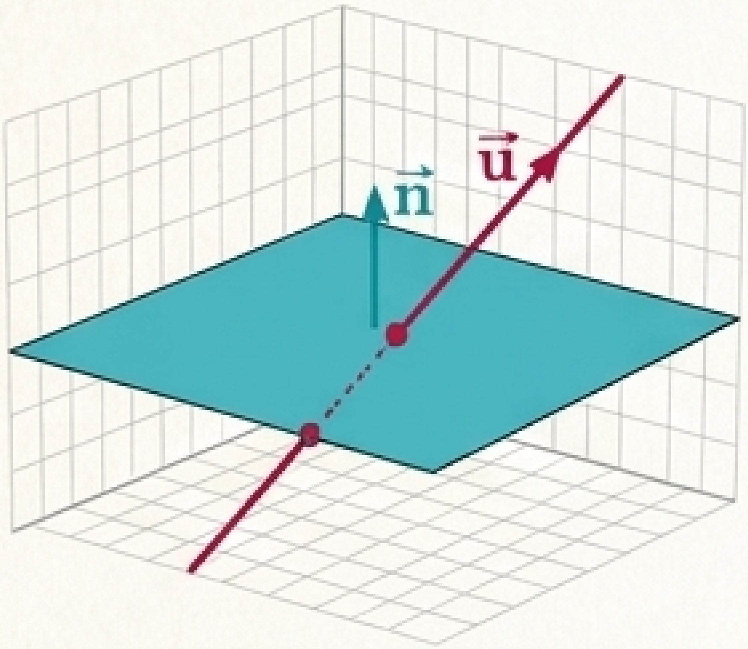
L'origine de l'équation :

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x - x_A)a + (y - y_A)b + (z - z_A)c = 0$$

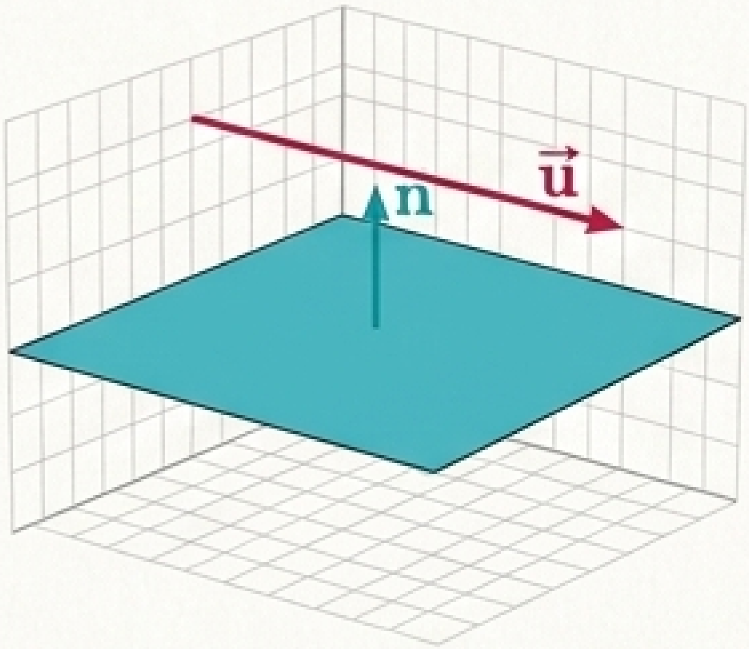
Intersections : Droite et Plan

Sécante (1 Point)



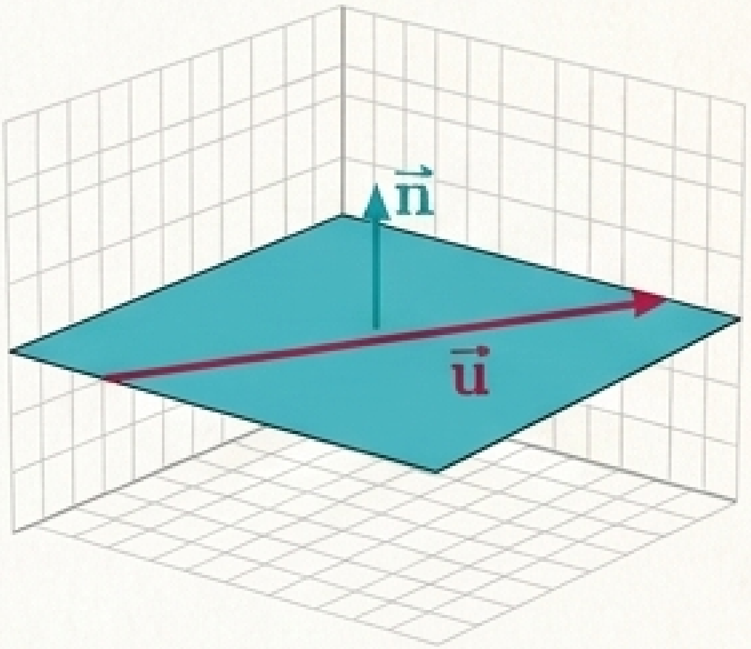
Condition : $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \neq 0$

Strictement Parallèle (0 Point)



Condition : $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ ET $A \notin P$

Droite Incluse (∞ Points)



Condition : $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ ET $A \in P$

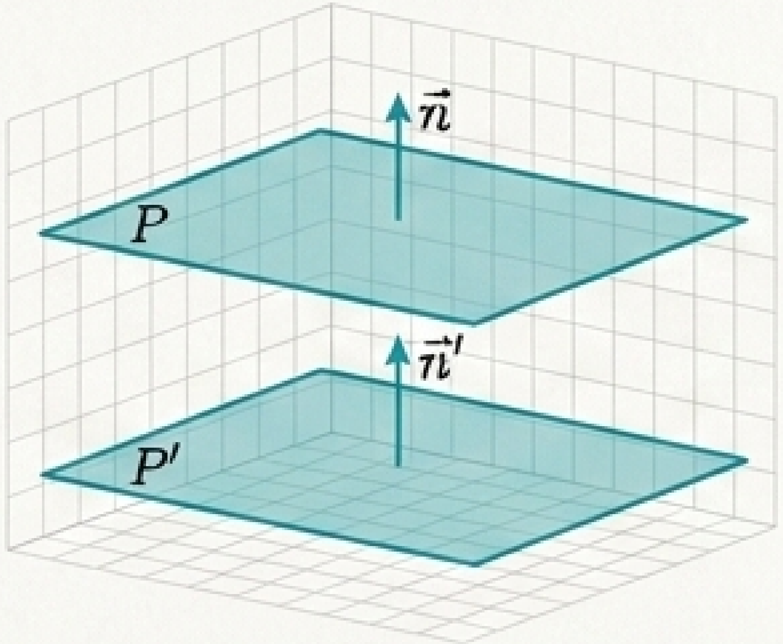
Exécution (Exemple 18.5)

Plan : $x - y - 3z = 0, \mathbf{n}(1,-1,-3)$
Droite : $x = 1-2t, y = -2, z = -2+t, \mathbf{u}(-2,0,1)$
Produit scalaire : $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = -5 \neq 0 \rightarrow$ Droite sécante
Substitution : $1 - 2t + 2 - 3(-2+t) = 0 \rightarrow t = 9/5$

Plan : $x = -2t, y = -2, \mathbf{n}(-,+x)$
Produit scalaire : $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = -5 \neq 0 \rightarrow$ Droite sécante
Substitution : $1 - 2t + 2 - 3(-2+t) = 0 \rightarrow t = 9/\frac{9}{5}$
Point d'intersection : $A(-13/5, -2, -1/5)$

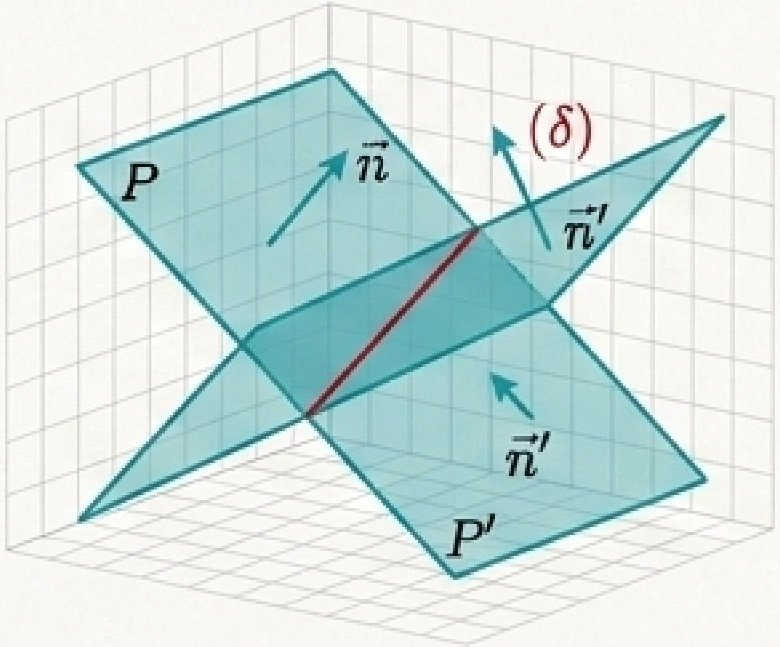
Intersections : Deux Plans

Parallélisme



Condition : $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.
Résultat : $P \cap P' = \emptyset$ (Strictement parallèles)
OU $P = P'$ (Confondus).

Sécants



Condition : $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ non colinéaires.
Résultat : L'intersection est une droite (δ).

Technique de Résolution (Exemple 18.6)

$P : x - y - 3z = 0 \quad | \quad Q : x + y - z + 1 = 0$

Vecteurs normaux $\vec{n}$(1,-1,-3) et $\vec{n}'$(1,1,-1) non colinéaires.

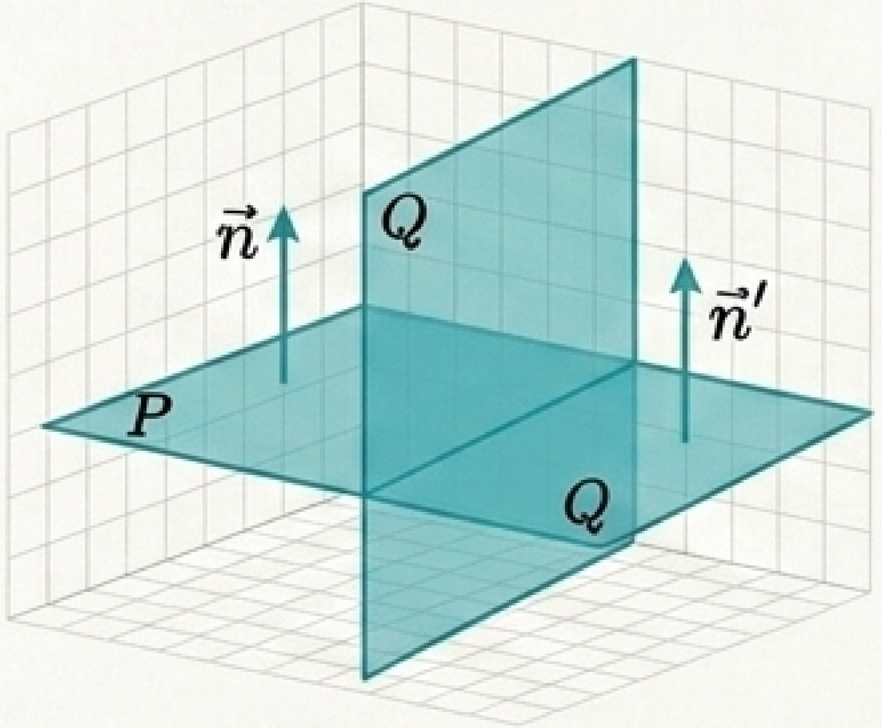
La Méthode du Paramètre : Posons $z = t$.

Le système devient : $x - y = 3t$ ET $x + y = t - 1$

En résolvant, la droite intersection (δ) a pour paramètres : $x = -\frac{1}{2} + 2t,\ y = -\frac{1}{2} - t,\ z = t$

Plans : Orthogonalité et Distances

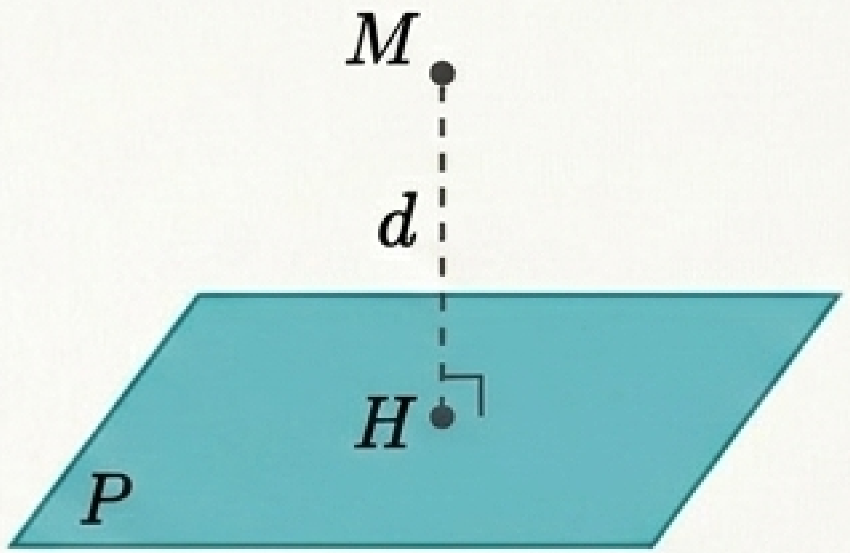
Plans Perpendiculaires



Condition : $P \perp Q \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$

Note : Un plan perpendiculaire à (xOy) prend la forme $ax + by + d = 0$ (car c=0).

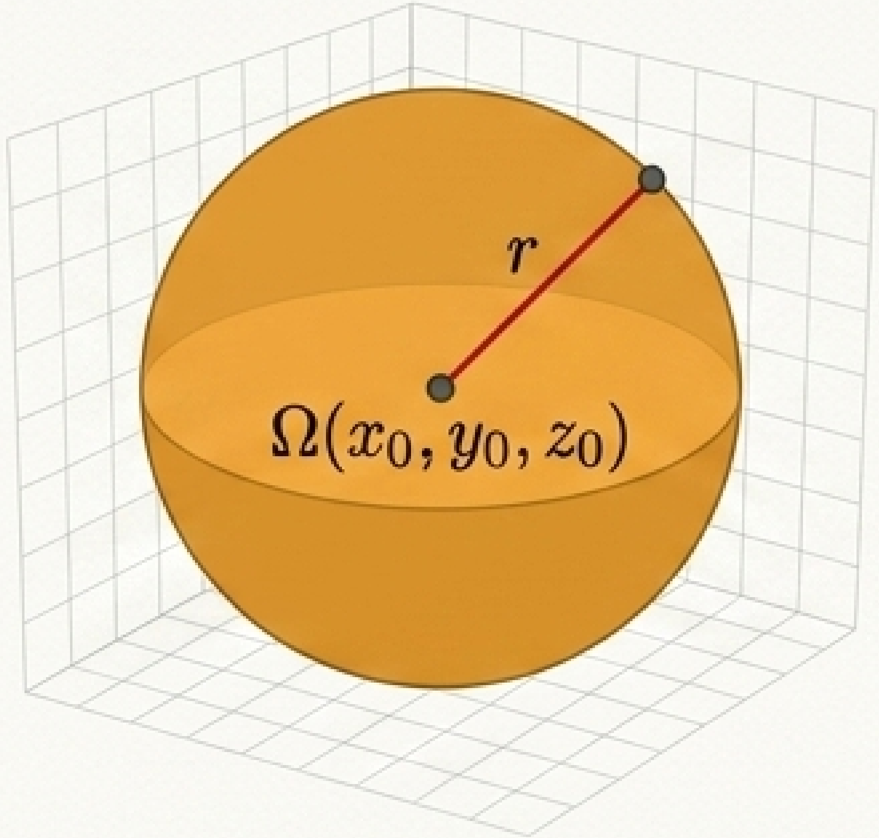
Distance d'un Point à un Plan



$$d(M, P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Preuve géométrique : $d(M, P) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

La Sphère : Définition Cartésienne



$$\Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Topological Spectrum		
1	2	3
La Surface (Sphère)	L'Intérieur (Boule ouverte)	Le Volume Complet (Boule fermée)
Condition : Distance $= r^2$ Exemple : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (Sphère unité)	Condition : Distance $< r^2$	Condition : Distance $\leq r^2$

Diagnostic Analytique d'une Sphère

Équation : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

Étape 1 : Calculer le discriminant spatial

$$K = \frac{a^2+b^2+c^2}{4} - d$$

Si $K > 0$

$\rightarrow$ C'est une Sphère.

Centre $\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$

Rayon $r = \sqrt{K}$

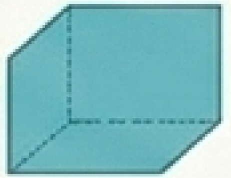
Si $K = 0$

$\rightarrow$ Dégénérescence.

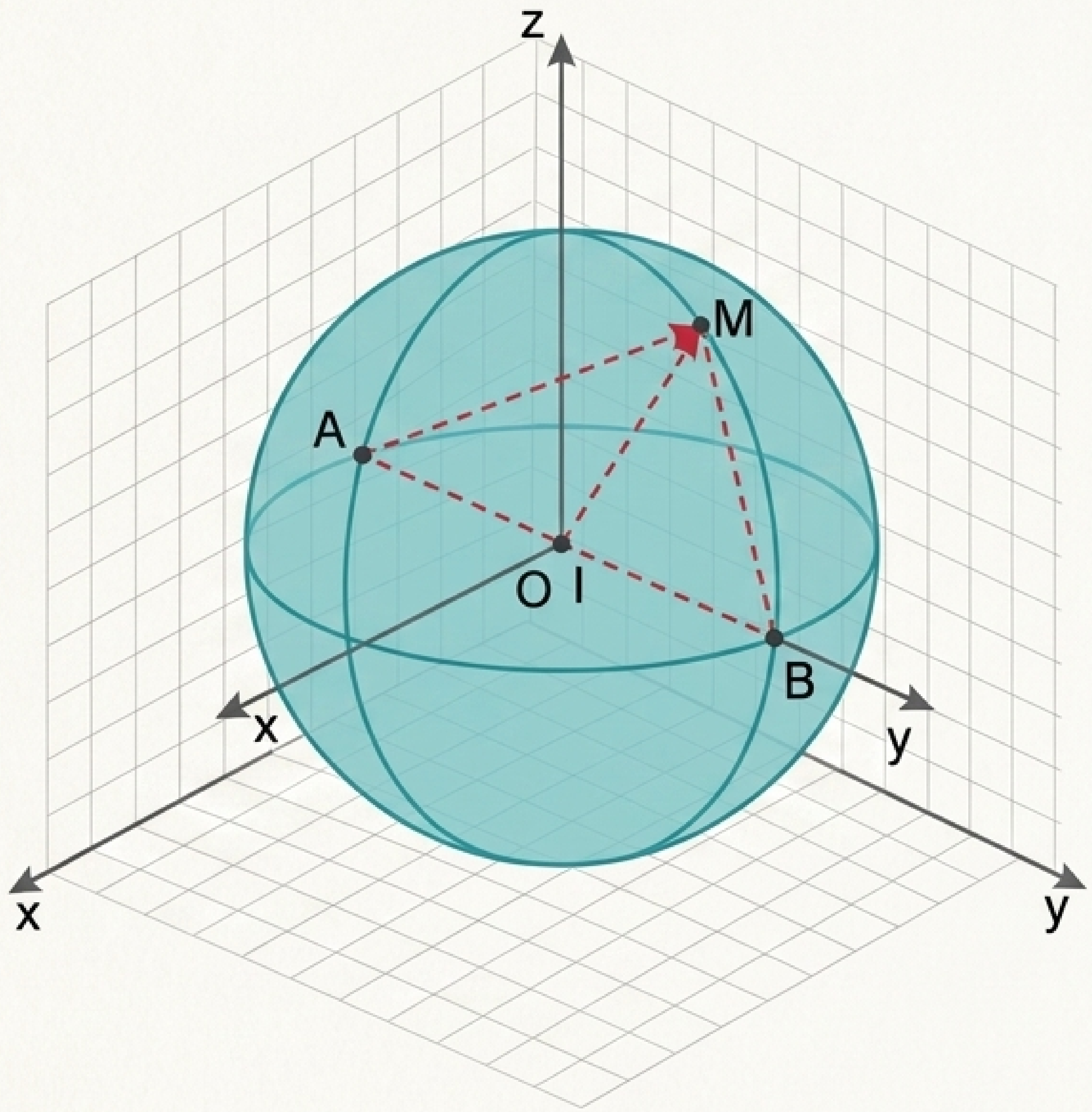
L'ensemble est réduit au point unique Ω.

Si $K < 0$

$\rightarrow$ Ensemble vide ($\emptyset$).



La Sphère et le Produit Scalaire



La Propriété de Réduction

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = IM^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Le Théorème du Diamètre

L'ensemble des points M tels que $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.

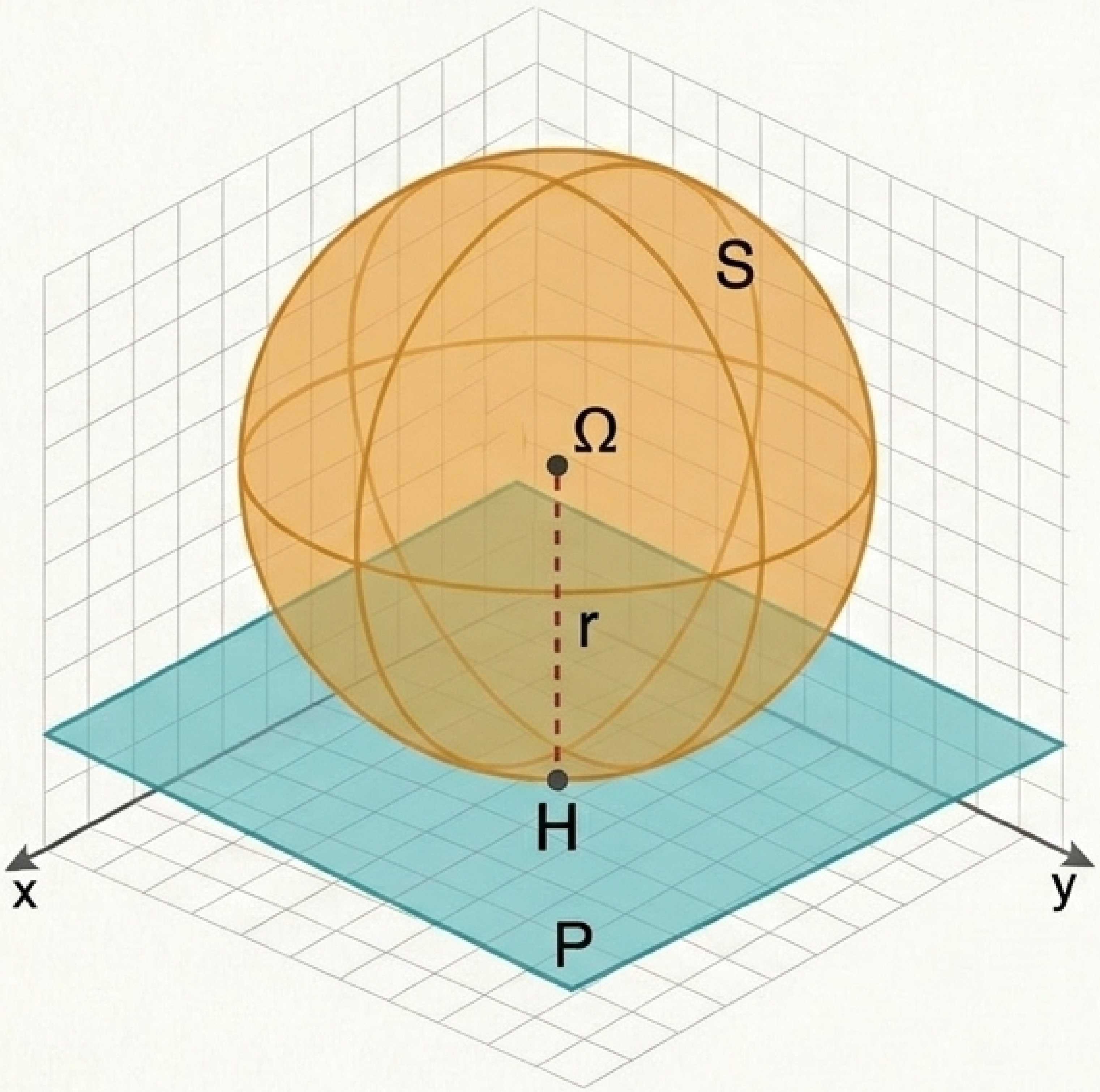
Application (Exemple 18.9)

Points $A(2,-2,-2)$ et $B(-2,2,1)$.

Équation brute : $(x-2)(x+2) + (y+2)(y-2) + (z+2)(z-1) = 0$

Forme canonique : $x^2 + y^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{41}{4}$

Intersection Sphère/Plan : La Tangence



Définition (Tangence)

Un plan P est tangent à S en H
$\iff H \in S \cap P \quad \text{et} \quad d(\Omega, P) = \Omega H = r.$

Le Vecteur Normal (Prop 18.15)

Le plan tangent en H admet le vecteur $\overrightarrow{\Omega H}$ comme vecteur normal.

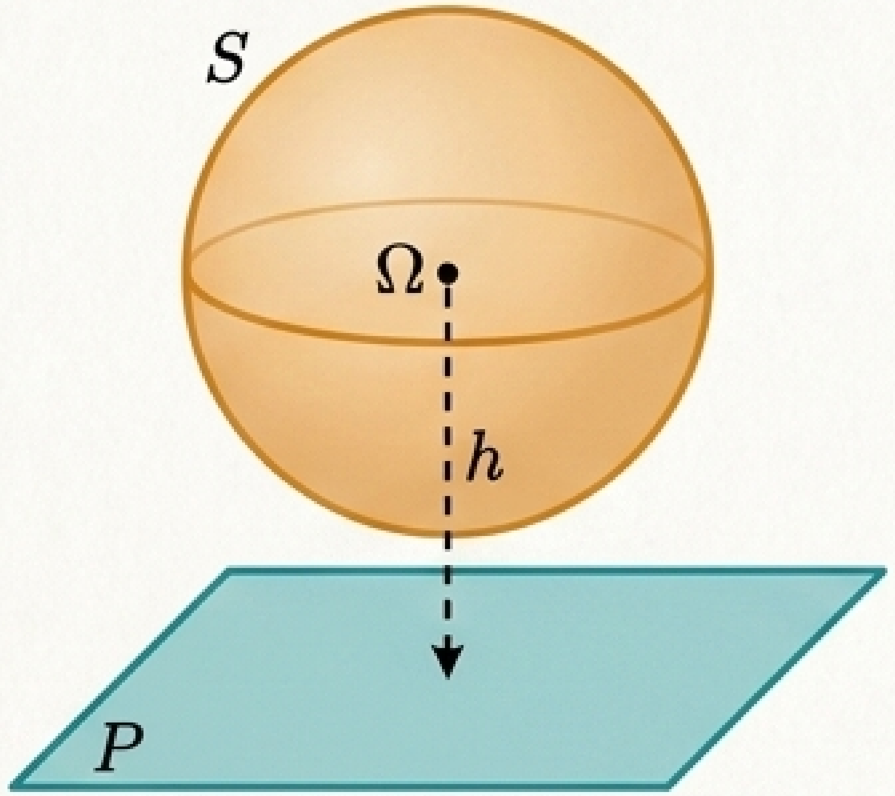
Exemple 18.10 : Sphère de diamètre [AB] avec A(1,2,0) et B(2,1,4). Cherchons le plan tangent en A.

1. Vecteur normal = $\overrightarrow{AB}(1,-1,4)$.
2. Équation du plan : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \rightarrow (x-1) - (y-2) + 4z = 0$
3. Résultat : $x - y + 4z + 1 = 0$

Positions Relatives : Sphère et Plan

$$\text{Soit } h = d(\Omega, P)$$

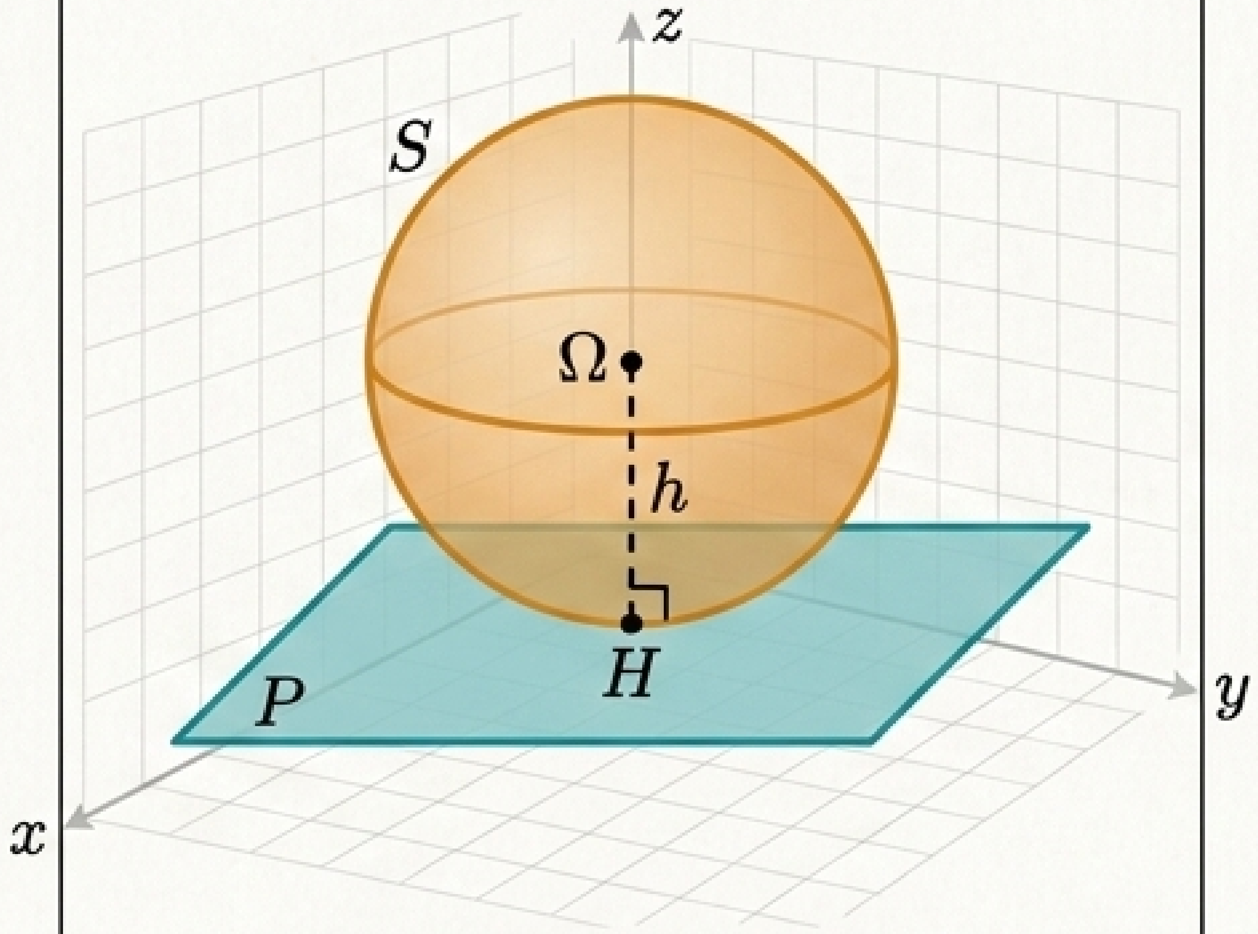
Pas d'intersection



Condition : $h > r$

Résultat : $P \cap S = \emptyset$

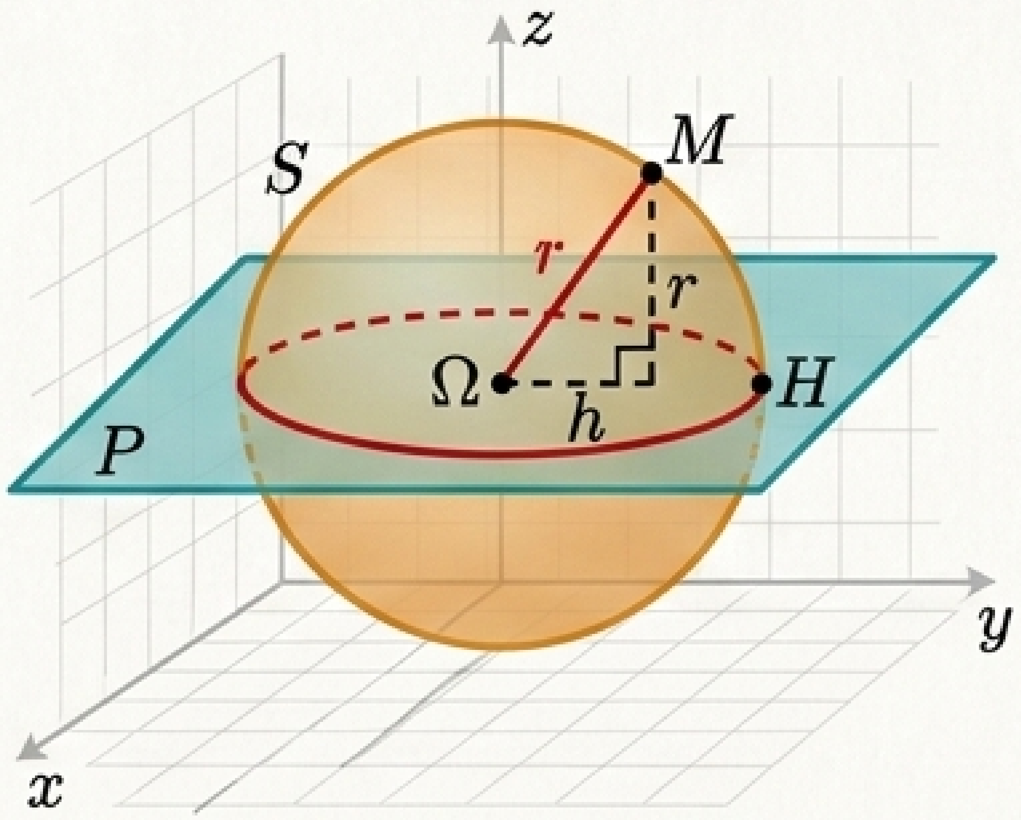
Tangence



Condition : $h = r$

Résultat : $P \cap S = \{H\}$

Cercle d'Intersection



Condition : $h < r$

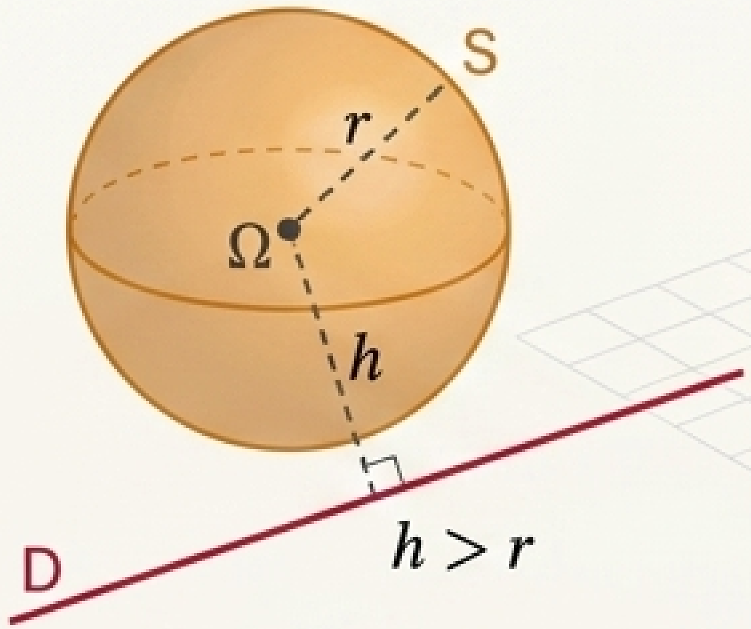
Théorème de Pythagore :
$$\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2$$

Rayon du cercle $(R) = \sqrt{r^2 - h^2}$

Positions Relatives : Sphère et Droite

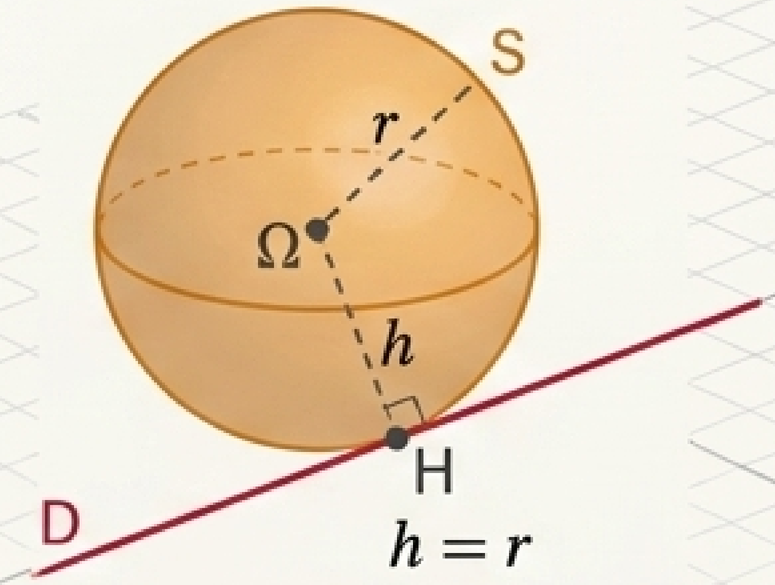
Soit $h = d(\Omega, D)$

Pas d'intersection



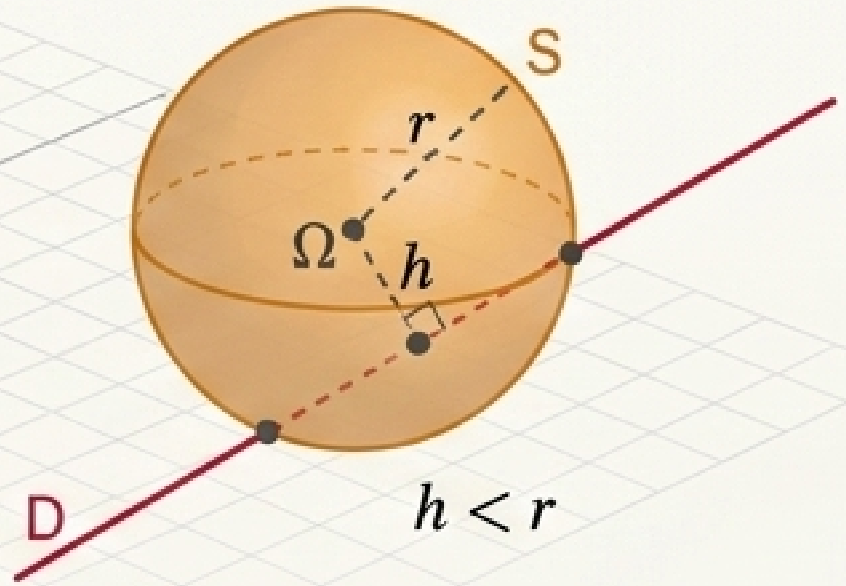
$h > r \rightarrow$ 0 point d'intersection ($\emptyset$).

Droite Tangente



$h = r \rightarrow$ 1 point de contact (H).
Le vecteur directeur de la droite est orthogonal à $\overline{\Omega H}$.

Droite Sécante



$h < r \rightarrow$ 2 points d'intersection
(La droite transperce la sphère).

Algorithme de Résolution (Exemple 18.11)

1. Sphère : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (Rayon r=2)
2. Droite paramétrique : $x = 1 - t$, $y = -4 + 6t$, $z = 3t$
3. Substitution dans l'équation de la sphère :
$$(1-t)^2 + (6t-4)^2 + (3t)^2 = 4$$
4. Équation quadratique résultante : $46t^2 - 50t + 13 = 0$
Les racines de ce polynôme déterminent le nombre exact et la position des points d'intersection.

Synthèse Architeturale de l'Espace Analytique

	La Droite (1D)	Le Plan (2D)	La Sphère (3D)
Éléments Caractéristiques	1 Point, 1 Vecteur directeur ($\vec{u}$)	1 Point, 2 Vecteurs (ou 1 Vecteur normal $\vec{n}$)	1 Centre (Ω), 1 Rayon (r)
Représentation Paramétrique	Système linéaire à 1 paramètre (t) $x = x_0 + at,$ $y = y_0 + bt,$ $z = z_0 + ct$	Système linéaire à 2 paramètres (t, t') $x = x_0 + at + a't',$ $y = y_0 + bt + b't',$ $z = z_0 + ct + c't'$	Non étudiée via système linéaire
Équation Cartésienne	N/A (Définie par l'intersection de 2 plans)	$ax + by + cz + d = 0$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

Le calcul vectoriel et les systèmes d'équations traduisent la topologie complexe de l'espace tridimensionnel en algorithmes solubles.