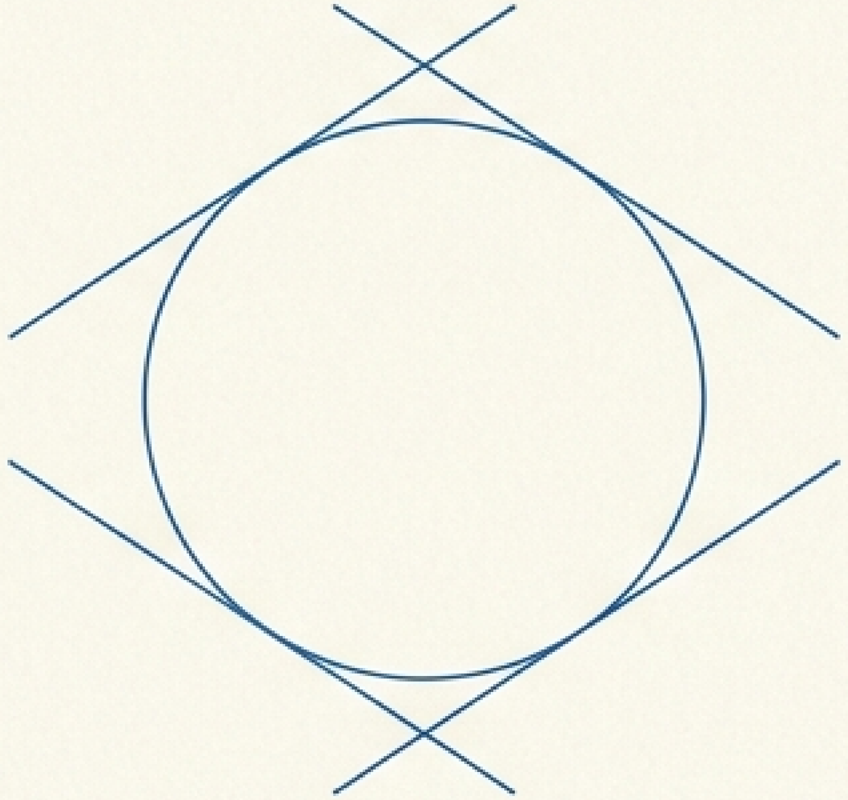
CHAPITRE 2

Divers Modes de Raisonnement

L'art de la démonstration mathématique



La rigueur n'est pas une contrainte, c'est un chemin vers la vérité. Ce module explore les outils fondamentaux permettant de transformer une hypothèse en une conclusion irréfutable.

Cartographie des Outils Logiques

Choisir le bon chemin de l'Hypothèse (A) vers la Conclusion (B).

Déduction
La voie royale

Équivalence
Le double sens

Analyse-Synthèse
L'enquête

Contraposée
Le miroir

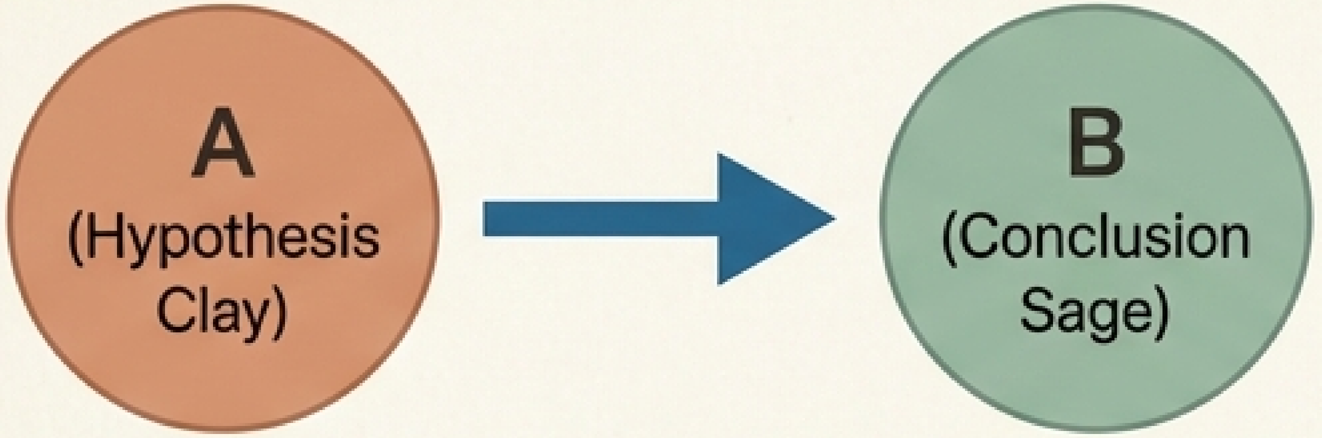
Absurde
La contradiction

Disjonction des cas
Diviser pour régner

Récurrence
L'effet domino

2.1 Le Raisonnement par Déduction

Le mode standard.



On suppose que A est vraie et on enchaîne les implications logiques pour montrer que B l'est aussi.

$$A \Rightarrow B$$

> Attention : Une implication $A \Rightarrow B$ peut être vraie même si A est fausse. Nous testons la validité du lien, pas l'origine.

Exemple : La chaîne logique

Montrons que $x^2 = x - 3 \Rightarrow x^4 = -5x + 6$

1. **Hypothèse** $x^2 = x - 3$
2. On élève au carré :
$$x^4 = (x^2)^2 = (x-3)^2$$
3. Expansion :
$$x^4 = x^2 - 6x + 9$$
4. Substitution de x^2 :
$$x^4 = (x-3) - 6x + 9$$
5. **Conclusion**
$$x^4 = -5x + 6$$

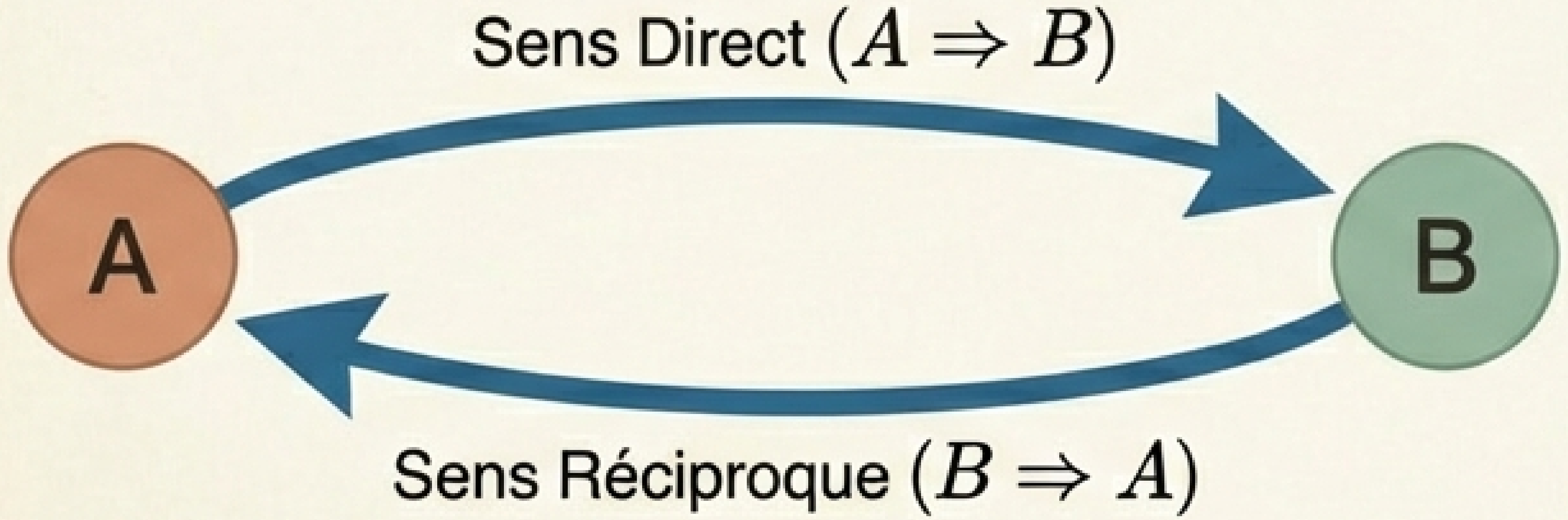
2.2 Le Raisonnement par Équivalence ($A \Leftrightarrow B$)

Méthode A : La Chaîne

$$A \Leftrightarrow A' \Leftrightarrow A'' \Leftrightarrow B$$

> Rapide, mais risqué si une étape n'est pas réversible.

Méthode B : La Double Implication



> La méthode de sécurité.

Meta-Cognition Box

Quand l'utiliser ? Dès que l'enchaînement direct semble bloqué ou périlleux, séparez le problème en deux implications distinctes.

Étude de Cas : Divisibilité et Équivalence

Problème : Soient $a_n = 2n + 1$ et $b_n = 3n + 5$. **Montrer :** $(7|a_n \text{ et } 7|b_n) \iff n \equiv 3\ [7]$

Sens Direct ($\Rightarrow$)

- **Hypothèse** : 7 divise $2n + 1$ et $3n + 5$.

$$2n + 1 = 7u \text{ et } 3n + 5 = 7v$$

- **Astuce** : Combinaison linéaire pour isoler n.

$$(3n + 5) - (2n + 1) = n + 4$$
$$n + 4 = 7v - 7u = 7(v - u)$$
$$n = 7(v - u) - 4$$

- On réécrit -4 comme $3 - 7$:

$$n = 3 + 7(v - u - 1)$$

- C'est de la forme $3 + 7k$.

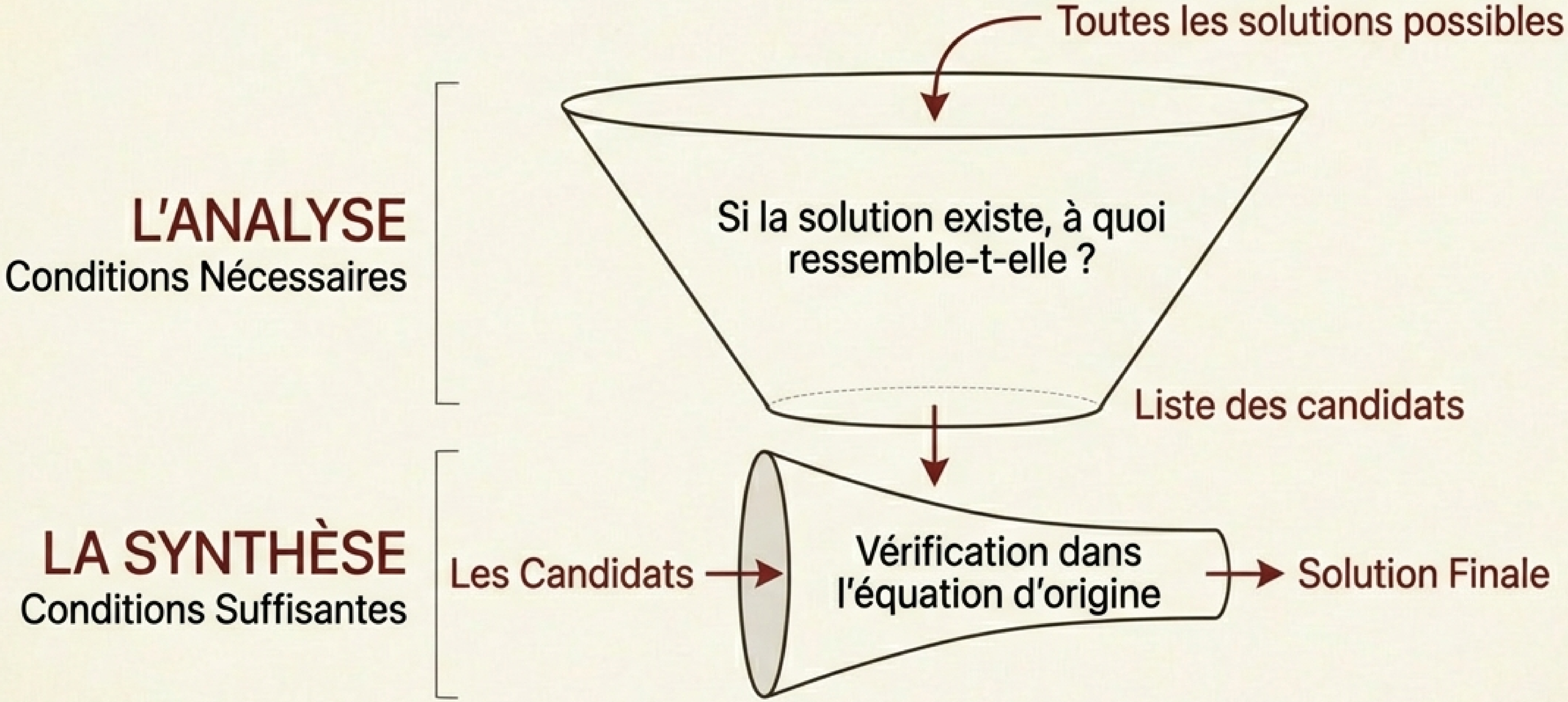
Sens Réciproque ($\Leftarrow$)

- **Hypothèse** : $n = 3 + 7k$.
- $a_n = 2(3 + 7k) + 1 = 7 + 14k = 7(1 + 2k)$
- Divisible par 7.
- $b_n = 3(3 + 7k) + 5 = 14 + 21k = 7(2 + 3k)$
- Divisible par 7.

Conclusion : L'équivalence est prouvée par double implication.

2.3 Le Raisonnement par Analyse-Synthèse

L’outil de recherche de solution.



Ce mode est unique car il sert à *trouver* une solution, pas seulement à la vérifier.

Application : Recherche de Polynômes

Trouver les polynômes P tels que $(P(X))^2 = XP(X)$.

Phase Analyse
(Recherche de forme)

Supposons $P \neq 0$. Soit n son degré.

$$\text{Degré de gauche } (P^2) = 2n$$

$$\text{Degré de droite } (XP) = n + 1$$

L'égalité impose :

$$2n = n + 1 \implies n = 1$$

Déduction : Si P existe, il est de la forme $aX + b$.

Phase Synthèse
(Calcul des coefficients)

On teste $P = aX + b$ dans l'équation.

$$(aX + b)^2 = X(aX + b)$$

$$a^2X^2 + 2abX + b^2 = aX^2 + bX$$

Par identification :

1. $a^2 = a \implies a = 1$ (car $a \neq 0$)
2. $2ab = b$
3. $b^2 = 0 \implies b = 0$

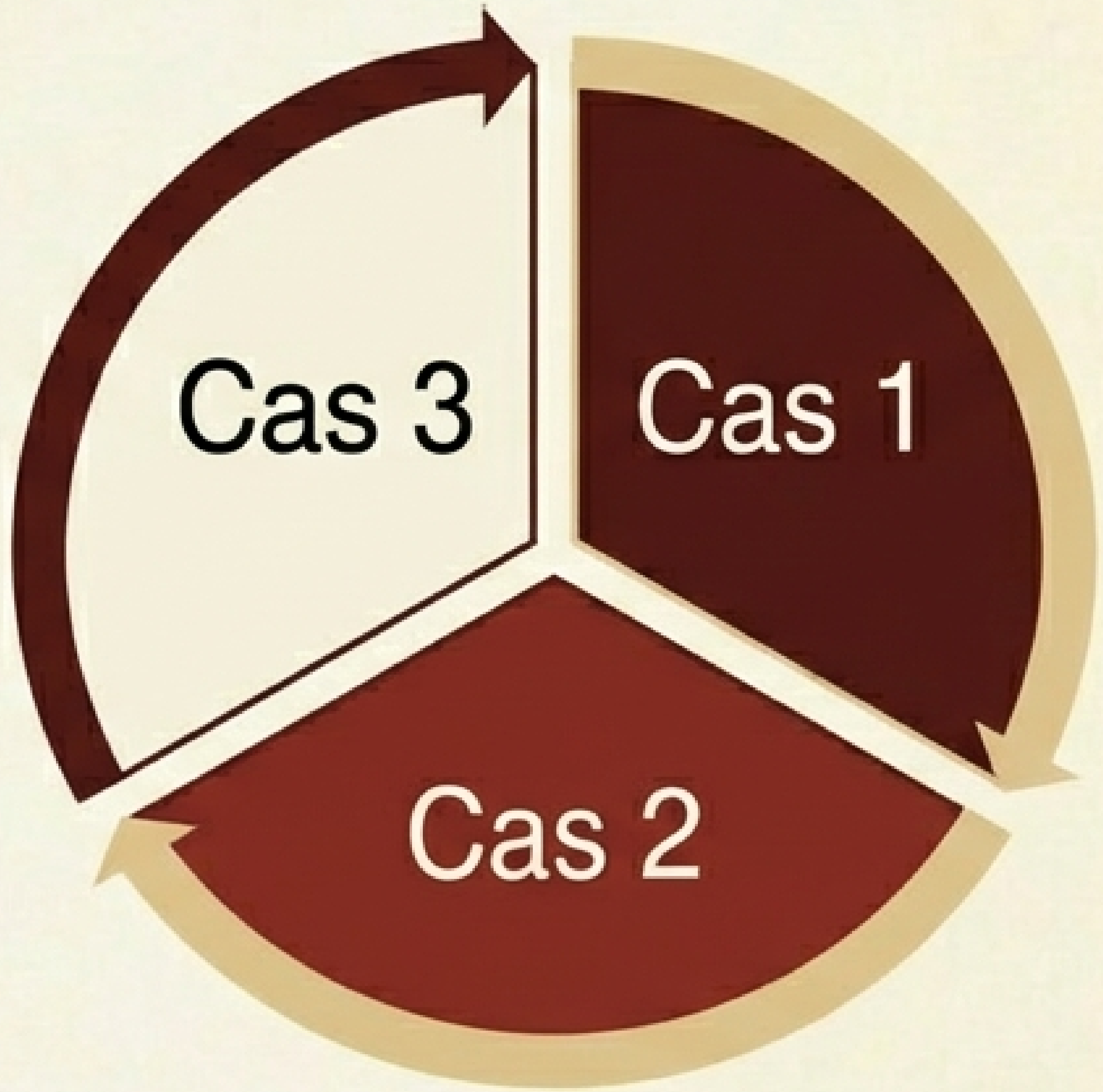
Conclusion : Les seules solutions sont $P(X) = 0$ et $P(X) = X$.

2.6 Disjonction des Cas

L'outil de couverture complète.

Démontrer une propriété générale en couvrant l'intégralité des situations possibles par des cas particuliers.

La réunion des cas doit couvrir tout l'ensemble de départ.



Quand l'utiliser ?

- Valeurs absolues ($|x|$)
- Parité (pair/impair)
- Restes de division euclidienne

Preuve par Disjonction : La Parité

Montrer que pour tout entier n, le nombre $n^2 + n$ est pair.

n

n est pair

$$\begin{aligned} n &= 2k \\ n^2 + n &= (2k)^2 + 2k \\ &= 4k^2 + 2k \\ &= 2(2k^2 + k) \end{aligned}$$

PAIR

n est impair

$$\begin{aligned} n &= 2k + 1 \\ n^2 + n &= (2k+1)^2 + (2k+1) \\ &= (4k^2 + 4k + 1) + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 6k + 2 \\ &= 2(2k^2 + 3k + 1) \end{aligned}$$

PAIR

Dans tous les cas possibles, la proposition est vérifiée.

2.4 Le Raisonnement par Contraposée

Au lieu de prouver la route directe, on prouve la route inverse de la négation.

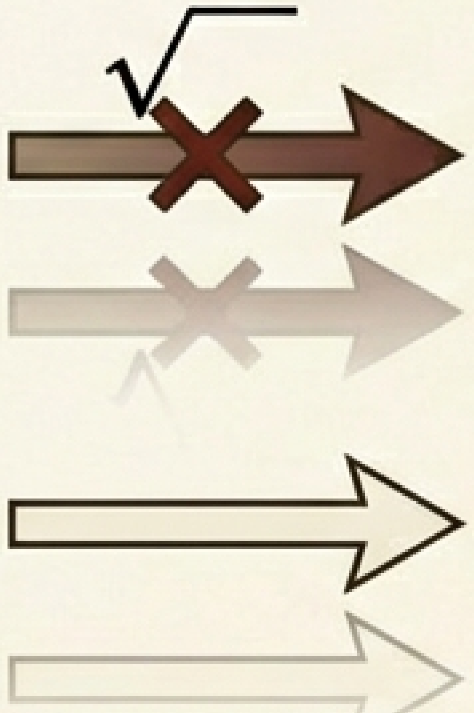
Avantage : Souvent, la négation (‘non B’) apporte plus d’informations exploitables que l’affirmation B.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non } B \Rightarrow \text{non } A)$$

Logiquement équivalent.

Exemple :

Pour prouver ‘n^2 pair $\Rightarrow$ n pair’...



...le sens direct est bloqué par la racine carrée.

...la contraposée (‘n impair $\Rightarrow$ n^2 impair’) débloque le calcul.

Mise en pratique : La Contraposée

Objectif : Montrer n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.

On démontre la contraposée : n impair $\Rightarrow n^2$ impair.

Soit n un nombre impair. On écrit $n = 2p + 1$.

On calcule le carré :

$$n^2 = (2p + 1)^2$$

Développement :

$$n^2 = 4p^2 + 4p + 1$$

Factorisation forcée :

$$n^2 = 2(2p^2 + 2p) + 1$$

Conclusion : n^2 est de la forme $2K+1$, donc impair.

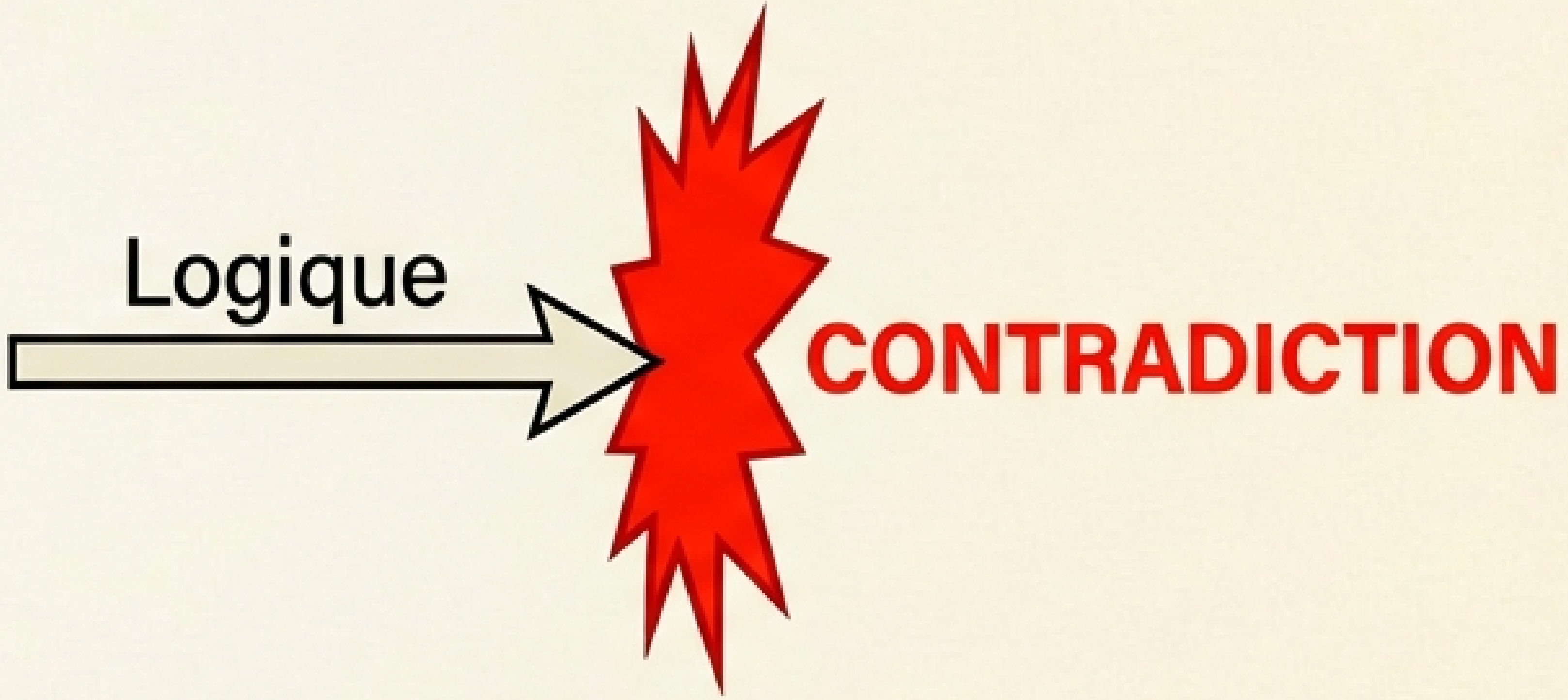
La contraposée est vraie, donc la proposition initiale est vraie.

2.5 Le Raisonnement par l’Absurde

Supposer que la proposition est fausse pour aboutir à une impossibilité.

Protocolo :

1. On veut montrer $A \Rightarrow B$.
2. On suppose : **A est vraie ET B est fausse** .
3. On déduit une contradiction mathématique (ex: $0 = 1$).
4. Conclusion : B ne peut pas être fausse.



L’arme absolue pour prouver des propriétés négatives (inexistence, irrationalité).

Le Classique : L'Irrationalité de $\sqrt{2}$

Hypothèse Absurde :
Supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{2} = p/q$ (fraction irréductible).

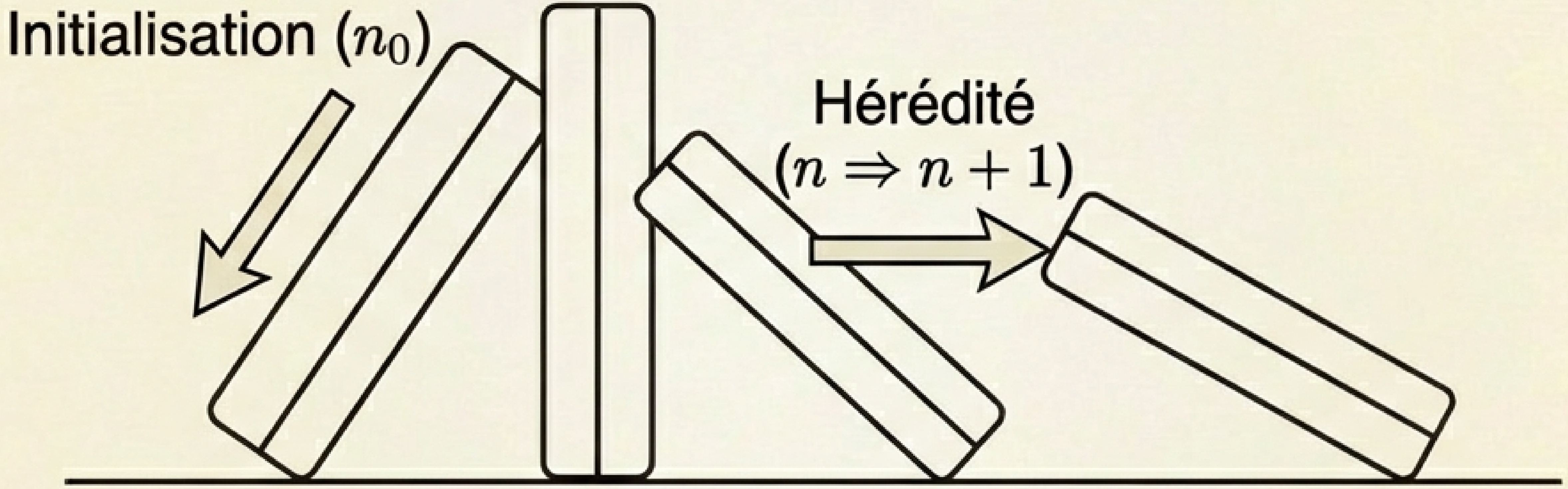
1. Élevons au carré :
$$\sqrt{2} = p/q \Rightarrow 2 = p^2/q^2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$
2. Déduction sur p : p^2 est pair $\Rightarrow$ p est pair. On écrit $p = 2p'$.
3. Substitution :
$$(2p')^2 = 2q^2 \Rightarrow 4p'^2 = 2q^2 \Rightarrow 2p'^2 = q^2$$
4. Déduction sur q : q^2 est pair $\Rightarrow$ q est pair.

CONTRADICTION : Si p et q sont tous deux pairs, la fraction p/q n'est pas irréductible.

Verdict : L'hypothèse de départ est fausse. $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2.7 Le Raisonnement par Récurrence

Spécifique aux entiers naturels ($\mathbb{N}$).



L'effet domino. Si le premier tombe, et que chaque domino fait tomber le suivant, alors tous tombent.

Cet outil puissant fera l'objet d'une étude approfondie au Chapitre 6.

Synthèse Stratégique : Quel outil choisir ?

Situation	Outil Recommandé
Vous voulez avancer droit au but ?	**Déduction**
Vous devez prouver "si et seulement si" ?	**Équivalence**
Vous cherchez une solution inconnue ?	**Analyse-Synthèse**
La variable alterne (pair/impair) ?	**Disjonction des cas**
La négation semble plus simple ?	**Contraposée**
Vous voulez prouver une inexistence ?	**Absurde**

La démonstration est le cœur battant des mathématiques.