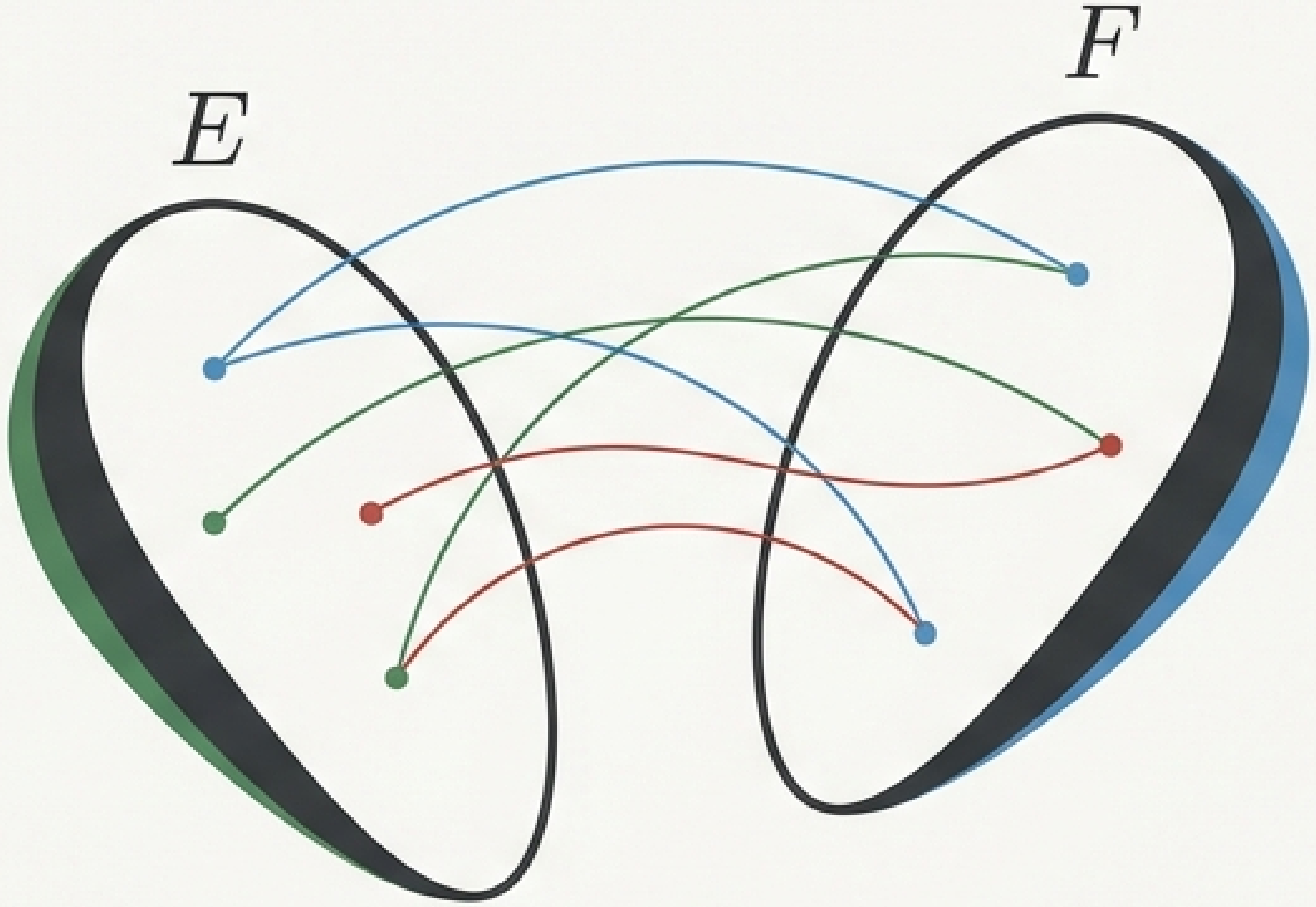
Chapitre 3 : Applications

Correspondances, Fonctions et Bijections



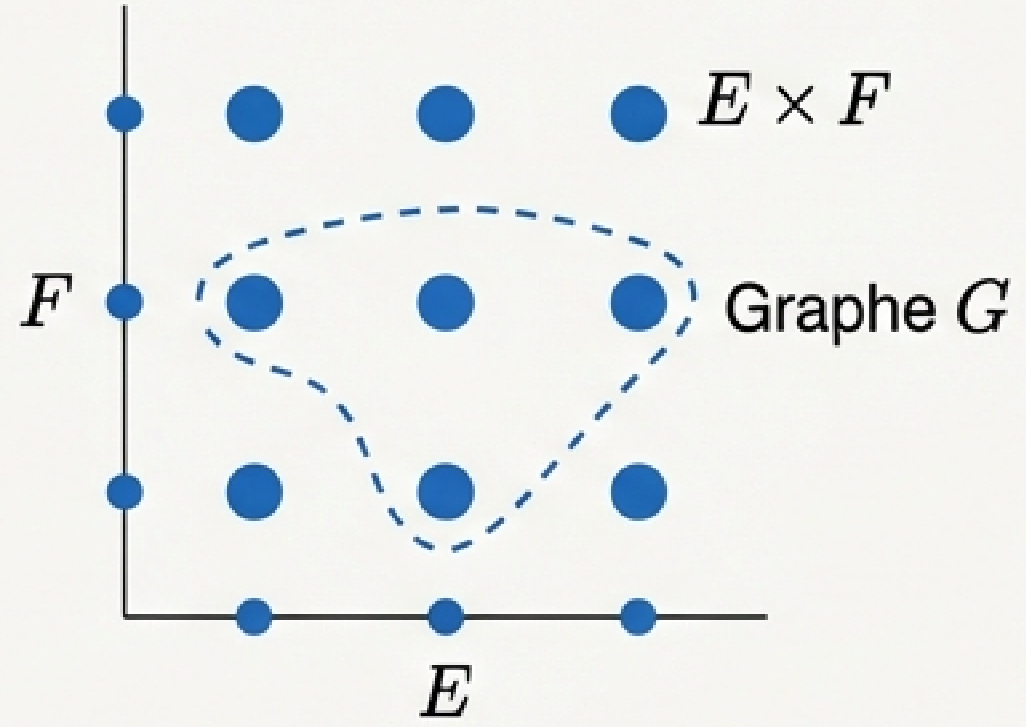
DÉFINITIONS FONDAMENTALES ET THÉORÈMES — BASÉ SUR LE CHAPITRE 3

3.1 Les Fondations : Produit Cartésien et Correspondance

Définition 3.1 : Produit Cartésien

Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

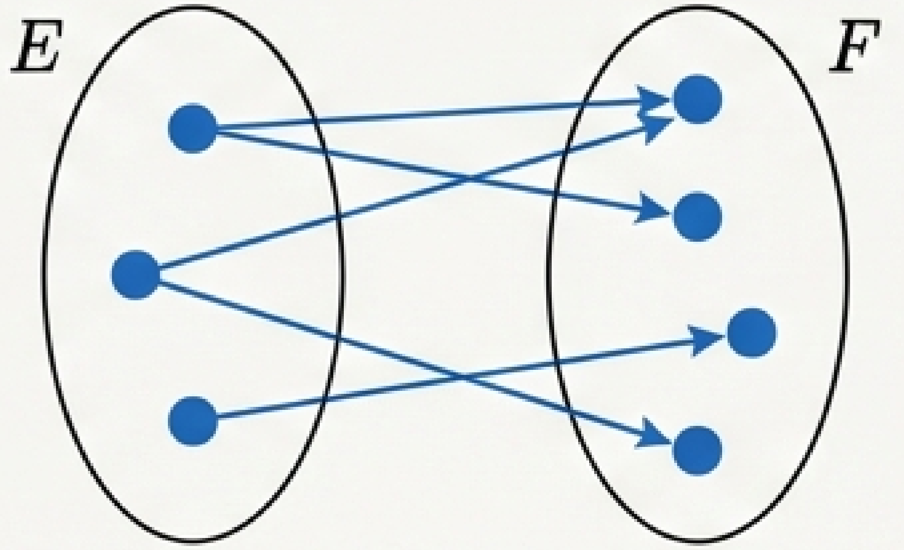
Cardinalité : Si fini, $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$.



Définition 3.2 : Correspondance

Une correspondance est un triplet $\Gamma = (G, E, F)$ où $G \subset E \times F$ est un graphe.

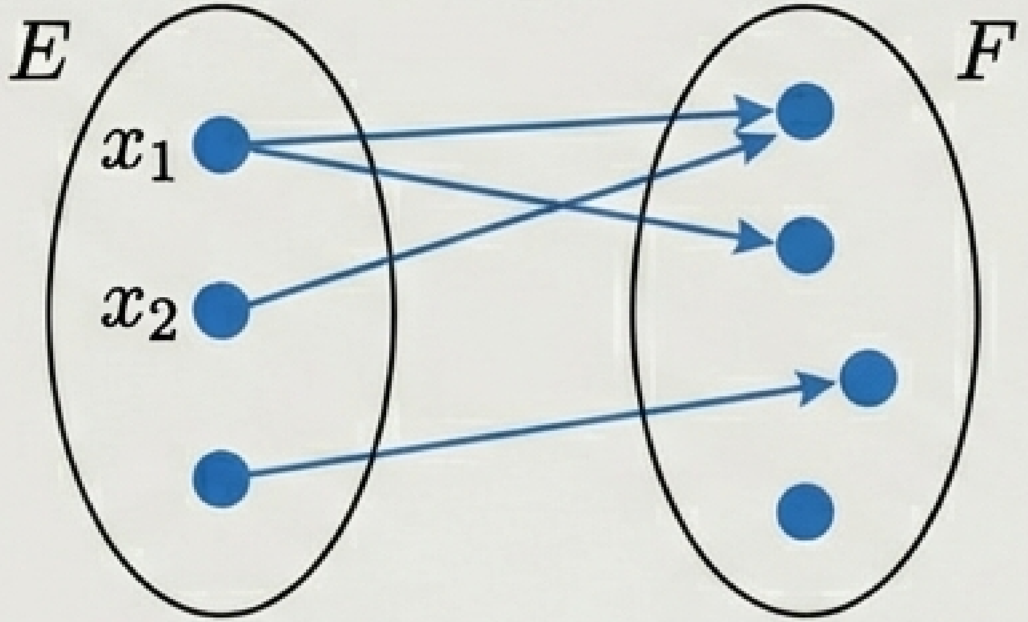
Vocabulaire : E est l'*ensemble de départ*, F est l'*ensemble d'arrivée*.



Représentation Sagittale d'une Correspondance

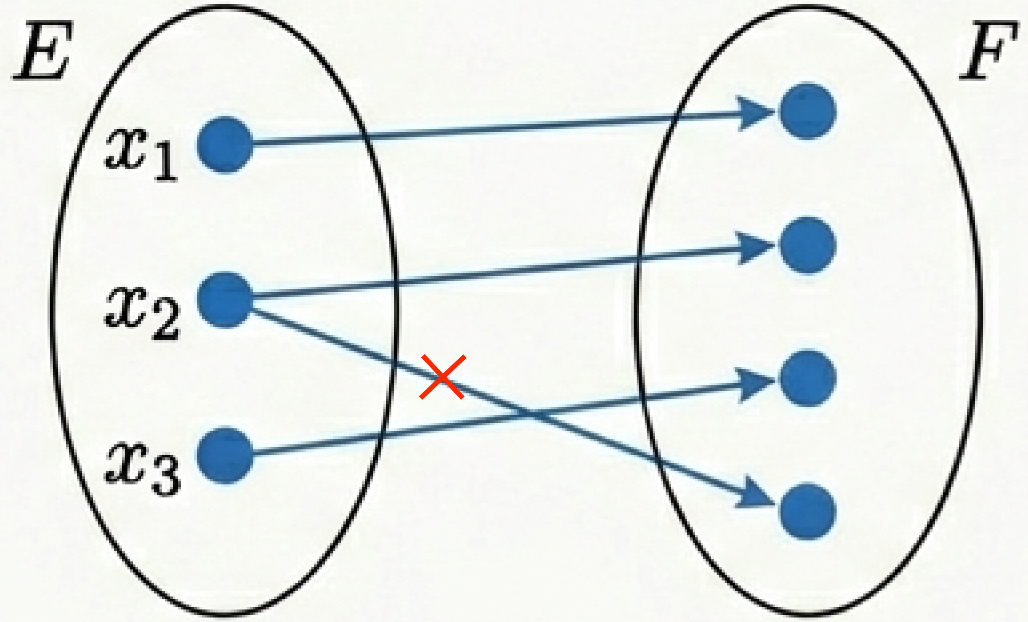
3.1.3 De la Correspondance à l'Application

Correspondance / Graphe



Un élément peut avoir 0, 1 ou plusieurs images.

Application (Fonction définie sur E)



$$\forall x \in E, \exists! y \in F, y = f(x)$$

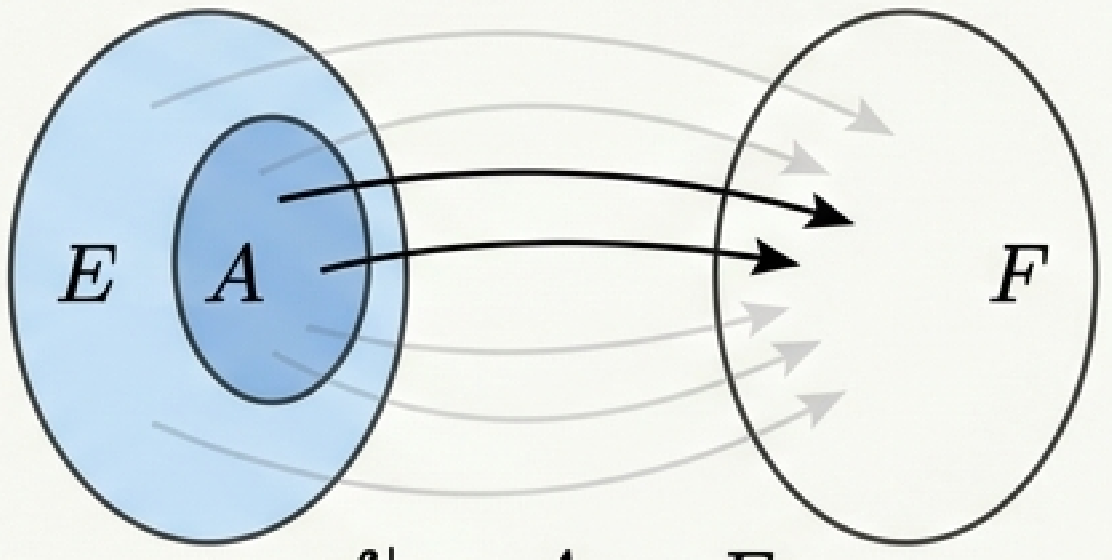
Définition : Une application $f : E \to F$ associe à chaque élément de l'ensemble de départ une **unique** image dans l'ensemble d'arrivée.

Notation : $x \mapsto f(x)$

3.1.4 Manipulations de Domaine

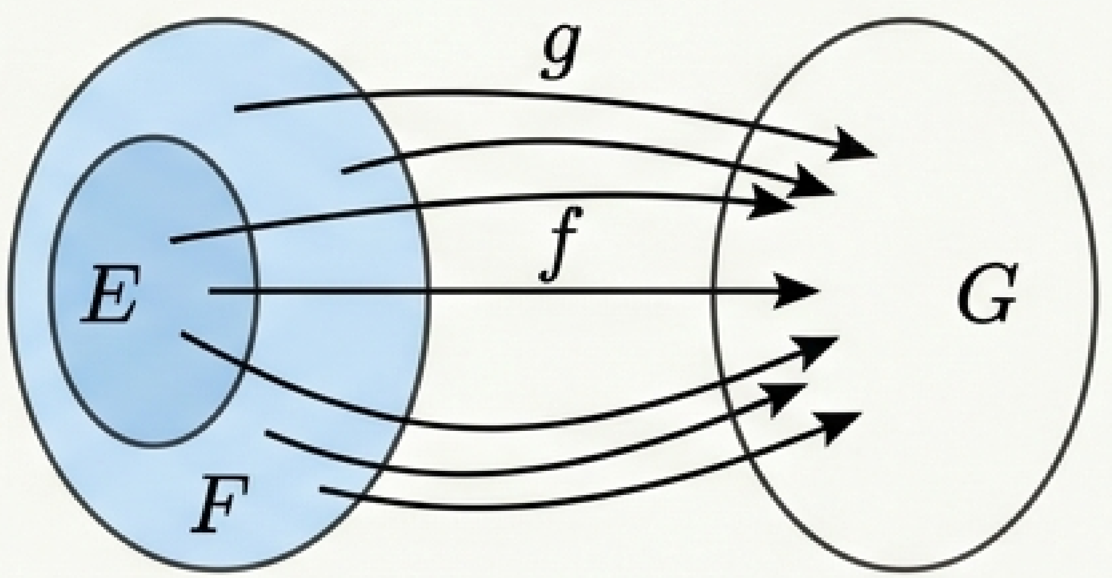
Restriction

Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$. La restriction $f|_A$ est l'application définie sur A par la même formule.



Prolongement

Soit $f : E \to G$. Une application $g : F \to G$ est un prolongement si $E \subset F$ et $\forall x \in E$, $g(x) = f(x)$.



3.2 Classification I : L'Injection

Formalisme

Définition : f est injective si des antécédents distincts ont des images distinctes.

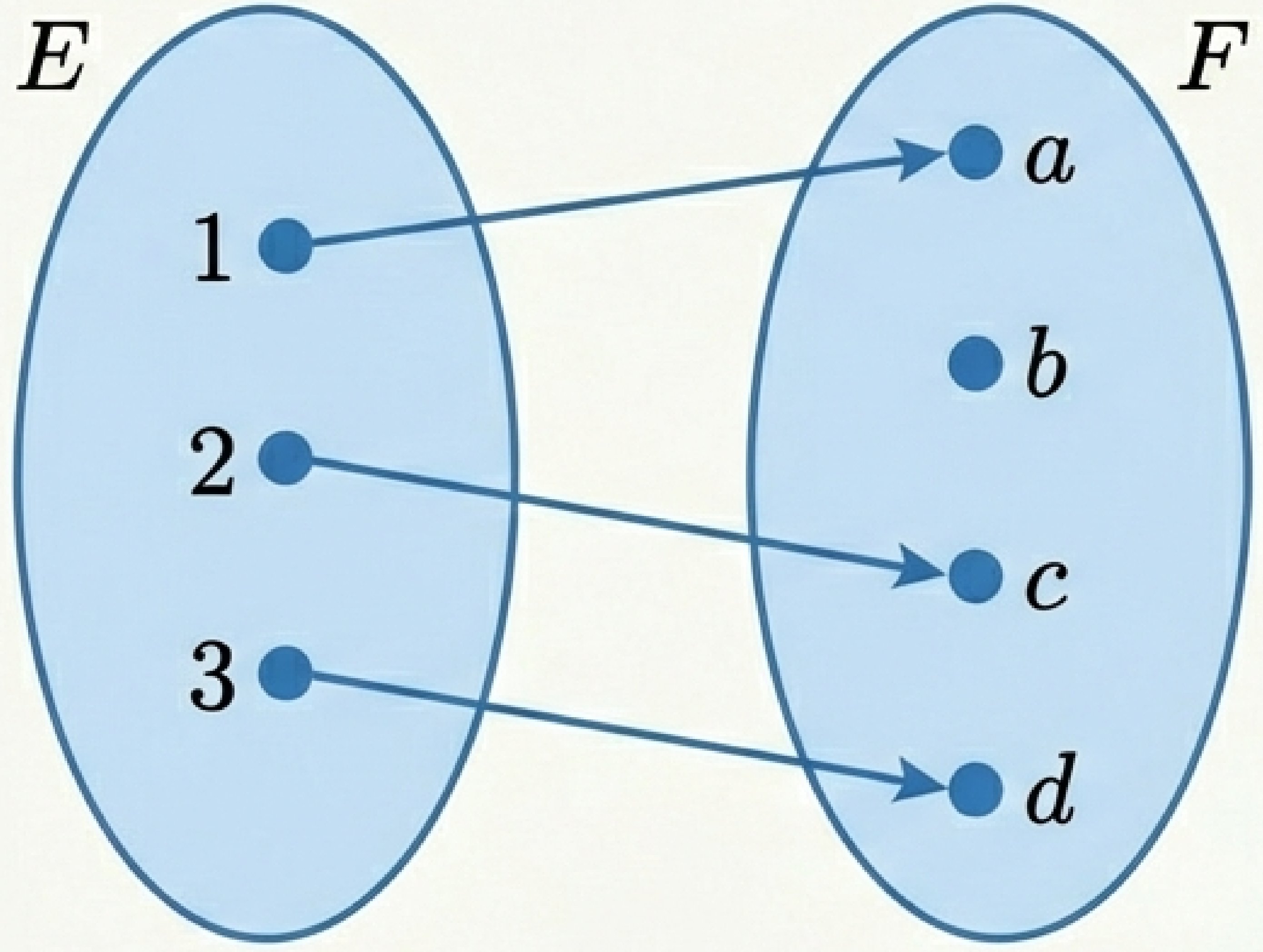
$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Proposition Clé

L'équation $f(x) = y$ admet **au plus une** solution.

Exemple 3.1 : $x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Visualisation



Jamais de collision à l'arrivée.

3.2 Classification II : La Surjection

Formalisme

Définition

f est surjective si tout élément de l'arrivée est atteint.

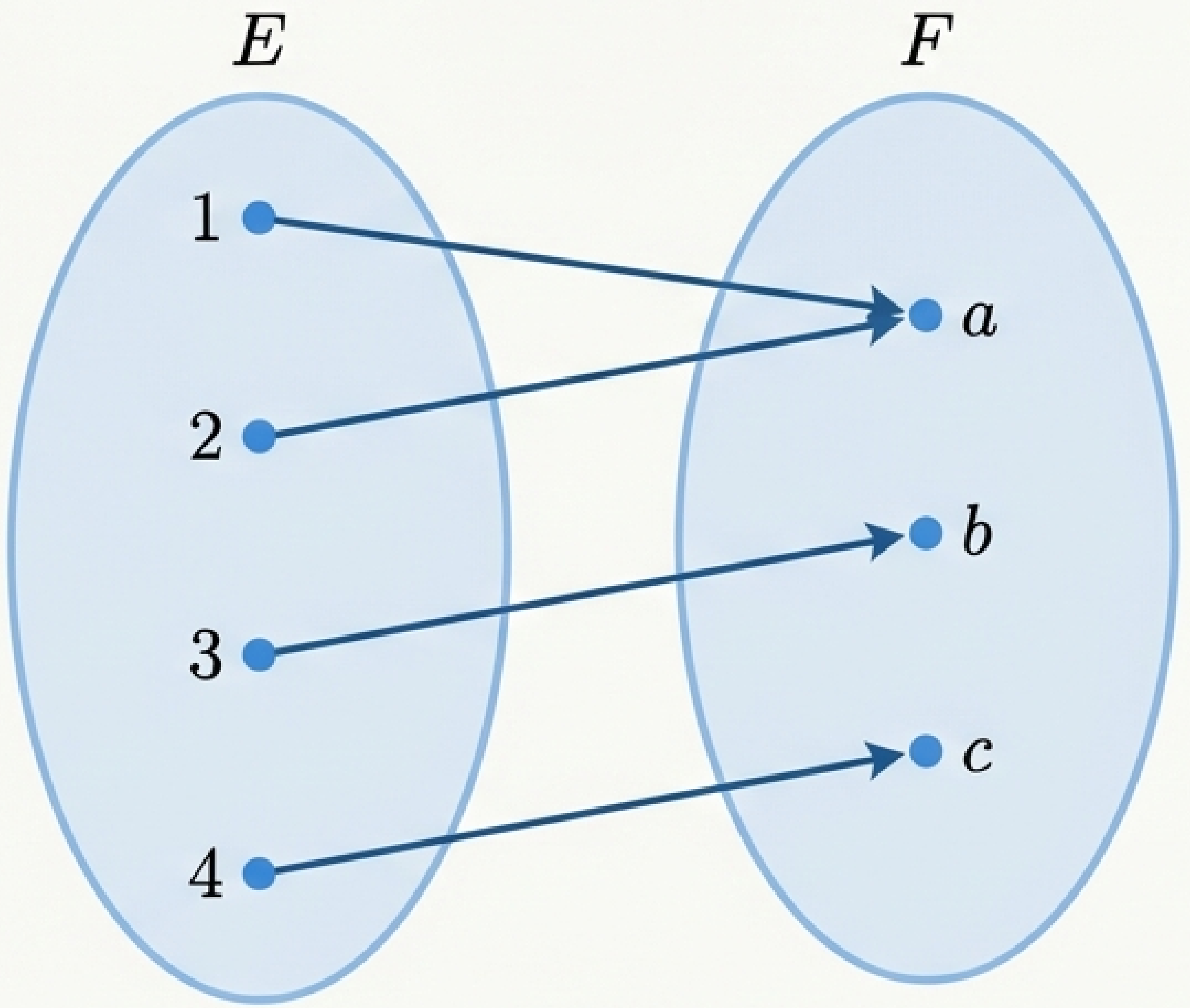
$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

Proposition Clé

L'équation $f(x) = y$ admet **au moins une** solution.

Exemple 3.2 : $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.

Visualisation



L'ensemble d'arrivée est totalement couvert.

3.2 Classification III : La Bijection

Formalisme

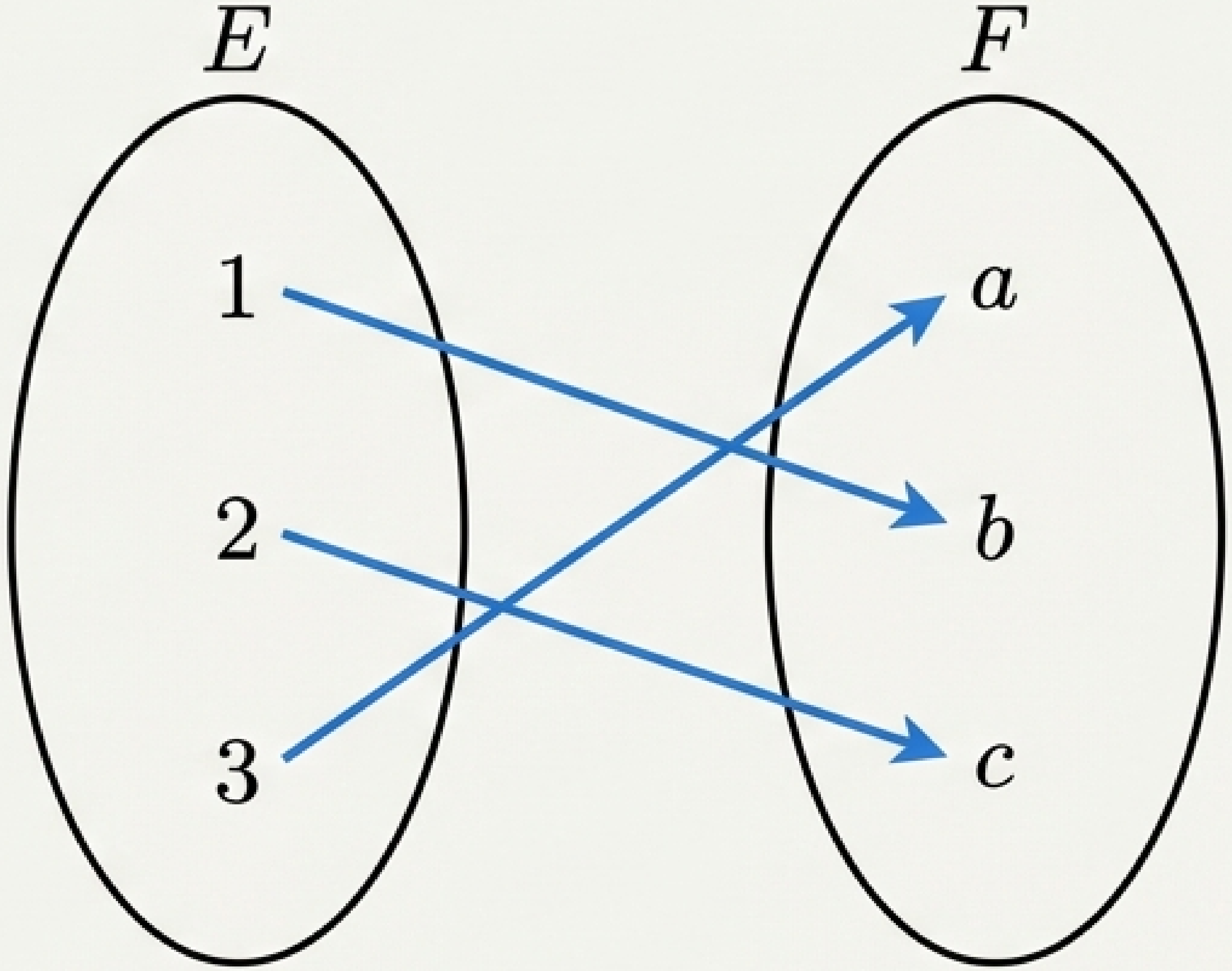
Définition : f est bijective si elle est à la fois Injective et Surjective.

Le Graal (Prop 3.4) : L'équation $f(x) = y$ admet **exactement une** solution unique.

$$\forall y \in F, \exists !\, x \in E, y = f(x)$$

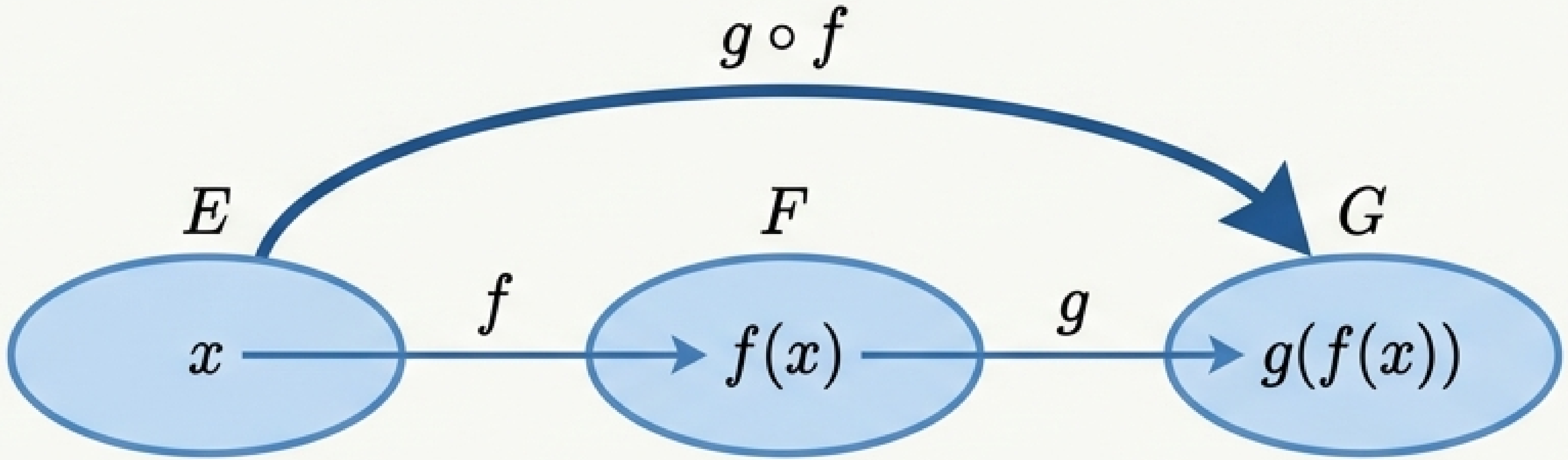
Exemple 3.3 : $x \mapsto \sin(x)$ de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1, 1]$.

Visualisation



Correspondance un-pour-un parfaite.

3.3 La Mécanique : Composition des Applications



Définition : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Condition : L'ensemble d'arrivée de f doit être inclus dans l'ensemble de départ de g.

Point de Vigilance : Non-Commutativité

En général, $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemple : $f(x) = x^2+1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. L'ordre change tout.

3.3 Propriétés de la Composition

Associativité

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Si f et g sont… alors $g \circ f$ est…

Injectives $\Rightarrow$ Injective

Surjectives $\Rightarrow$ Surjective

Bijectives $\Rightarrow$ Bijective

Si $g \circ f$ est…

Injective $\Rightarrow$ f (la première) est injective.

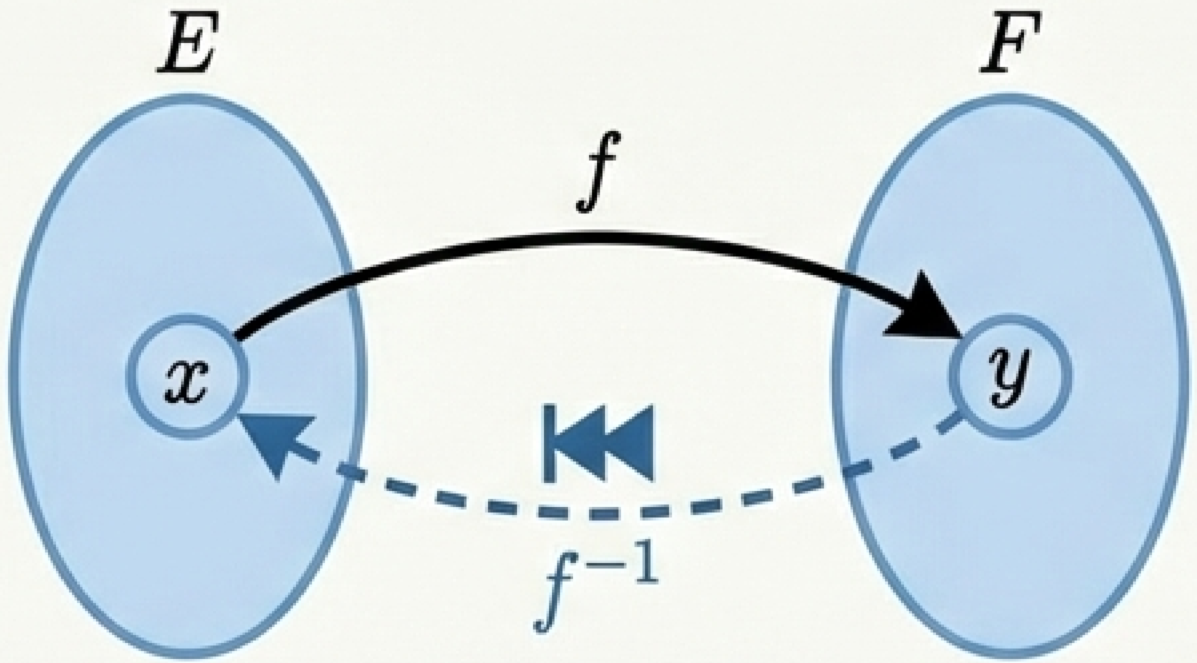
Surjective $\Rightarrow$ g (la seconde) est surjective.

3.4 L'Application Réciproque

Définition
Si $f : E \to F$ est bijective, il existe $f^{-1} : F \to E$.

Relation fondamentale :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$



Méthode de calcul :
Pour trouver f^{-1}, on résout l'équation $y = f(x)$ en isolant x.

Exemple 3.8 : $u : x \mapsto \sqrt{x-2}$ de $[2, +\infty[$ vers $\mathbb{R}_+$.

Résolution :

$y = \sqrt{x-2} \Rightarrow y^2 = x - 2 \Rightarrow x = y^2 + 2.$

Donc $u^{-1}(y) = y^2 + 2.$

3.4 Identité et Simplification

L'Application Identité : $Id_E : x \mapsto x$

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$$
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$$

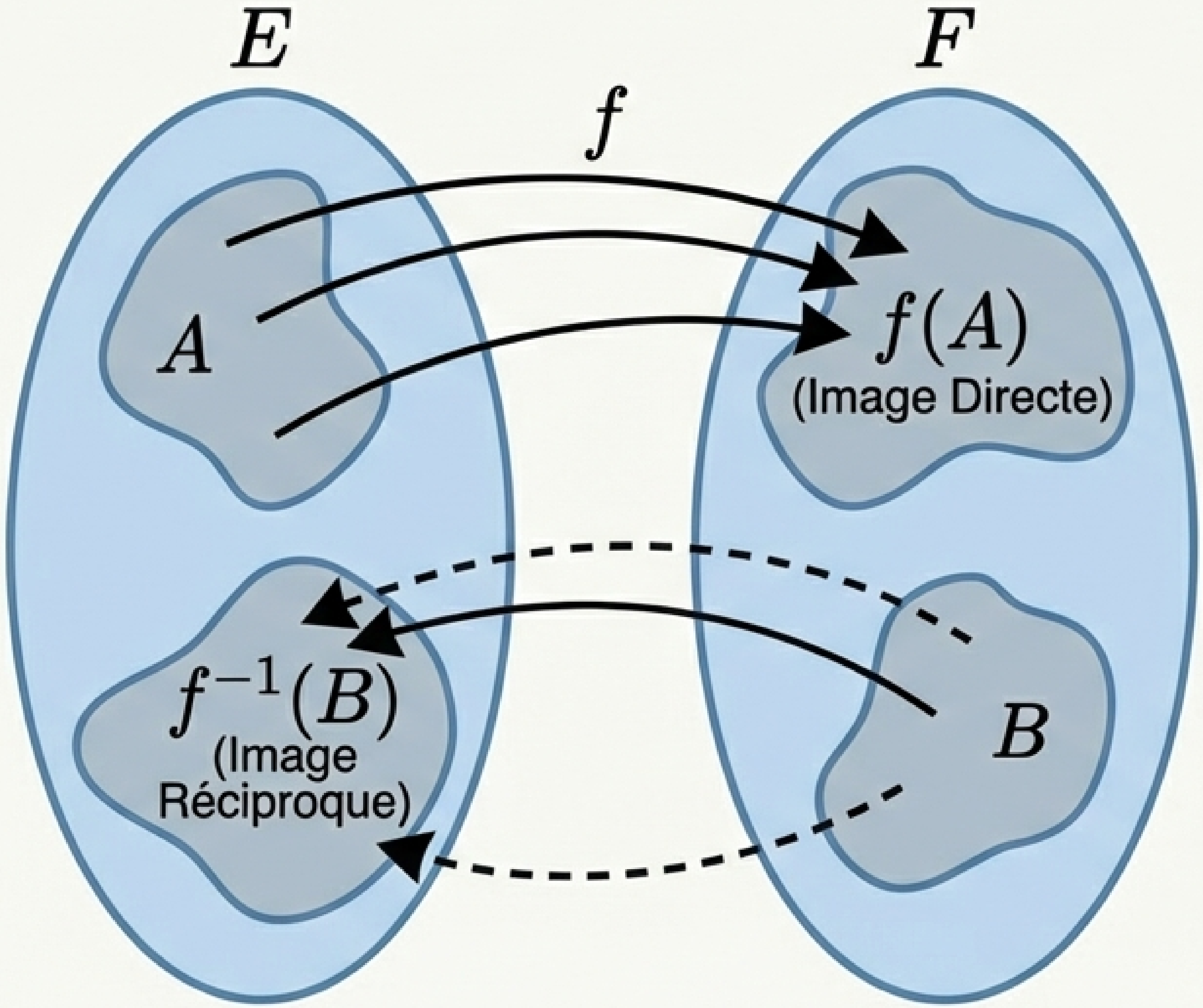
Les fonctions inverses s'annulent mutuellement.

Inversion d'une composée (Corollaire 3.10) :

$$(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$$

On s'habille : u puis v. On se déshabille : v^{-1} puis u^{-1}.

3.5 Images Directes et Réciproques



$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Point de Vigilance :
La notation $f^{-1}(B)$ désigne un *ensemble* (l'image réciproque). Elle existe pour **toute** fonction, même si f n'est pas bijective (et n'a donc pas de fonction réciproque).

3.5 Algèbre des Ensembles via Fonctions

Image Directe (f)	**Image Réciproque (f^{-1})**
$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$	$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (Notez l'inclusion stricte !)	$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ (Égalité parfaite)

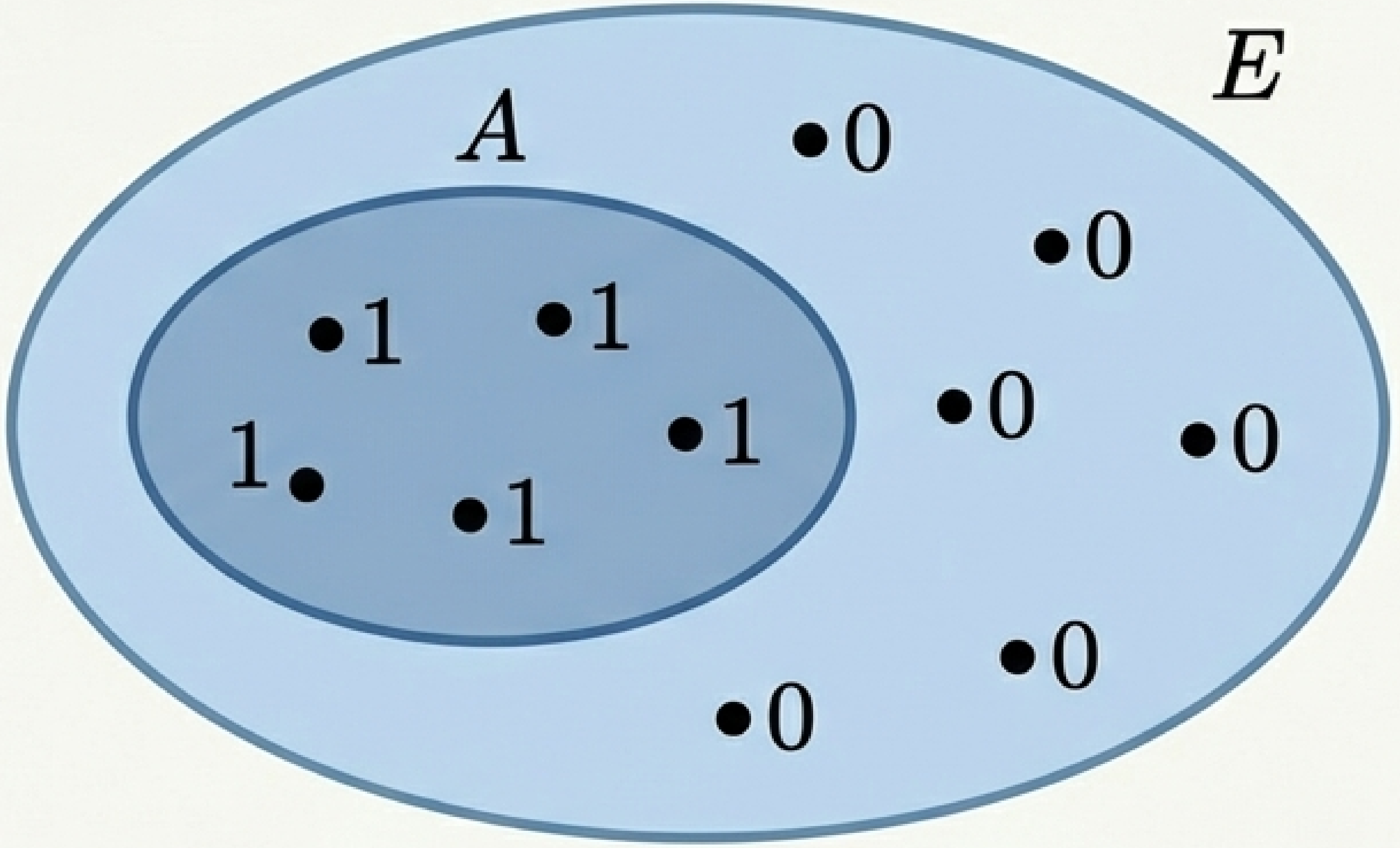
L'image réciproque f^{-1} se comporte beaucoup mieux avec les opérations ensemblistes que l'image directe.

3.6 Fonction Indicatrice

Fonction Indicatrice $\mathbb{1}_A$

$\mathbb{1}_A(x) = 1 \text{ si } x \in A$

$\mathbb{1}_A(x) = 0 \text{ si } x \notin A$



Intersection → Multiplication :

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$$

Complémentaire → Soustraction :

$$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$$

Propriété 3.13 : Il existe une bijection naturelle entre l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ et l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$.

3.7 Familles Indexées & Résumé

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est une fonction de l'ensemble d'indices I vers E.

Union généralisée : $\bigcup_{i \in I} A_i$ | Intersection généralisée : $\bigcap_{i \in I} A_i$

Tableau Récapitulatif : Équation $f(x)=y$

	Injection	Surjection	Bijection
Constraint	Au plus 1 solution	Au moins 1 solution	Exactement 1 solution
Quantifier	$\exists!?x$ (0 ou 1)	$\exists x$ (1 ou +)	$\exists! x$ (1 unique)
Visual Icon