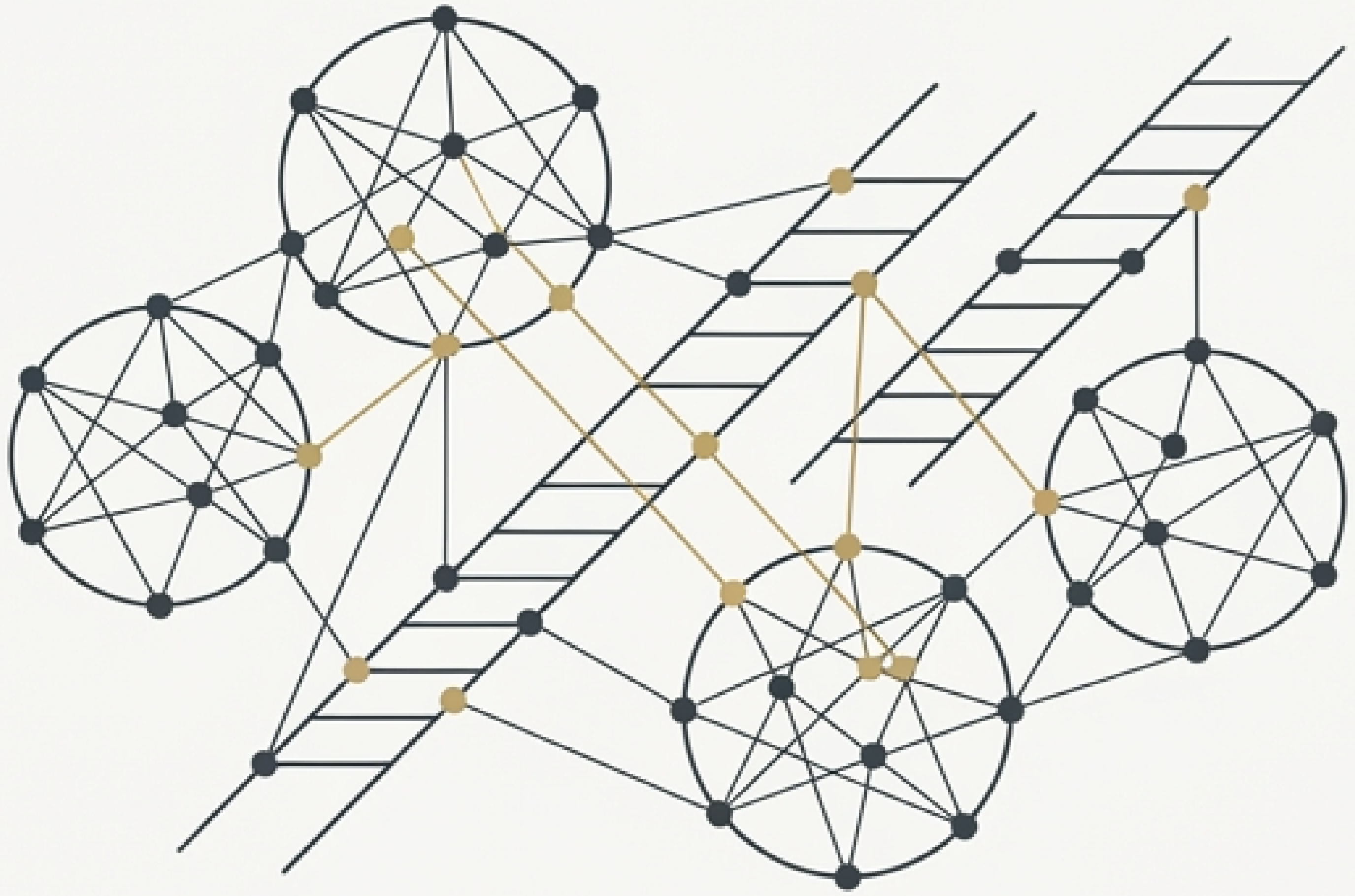
Théorie des Ensembles : Les Relations



STRUCTURES FONDAMENTALES : RELATIONS BINAIRES, ÉQUIVALENCE ET ORDRE

Basé sur le Chapitre 4. Ce document est conçu pour une lecture autonome et détaillée.

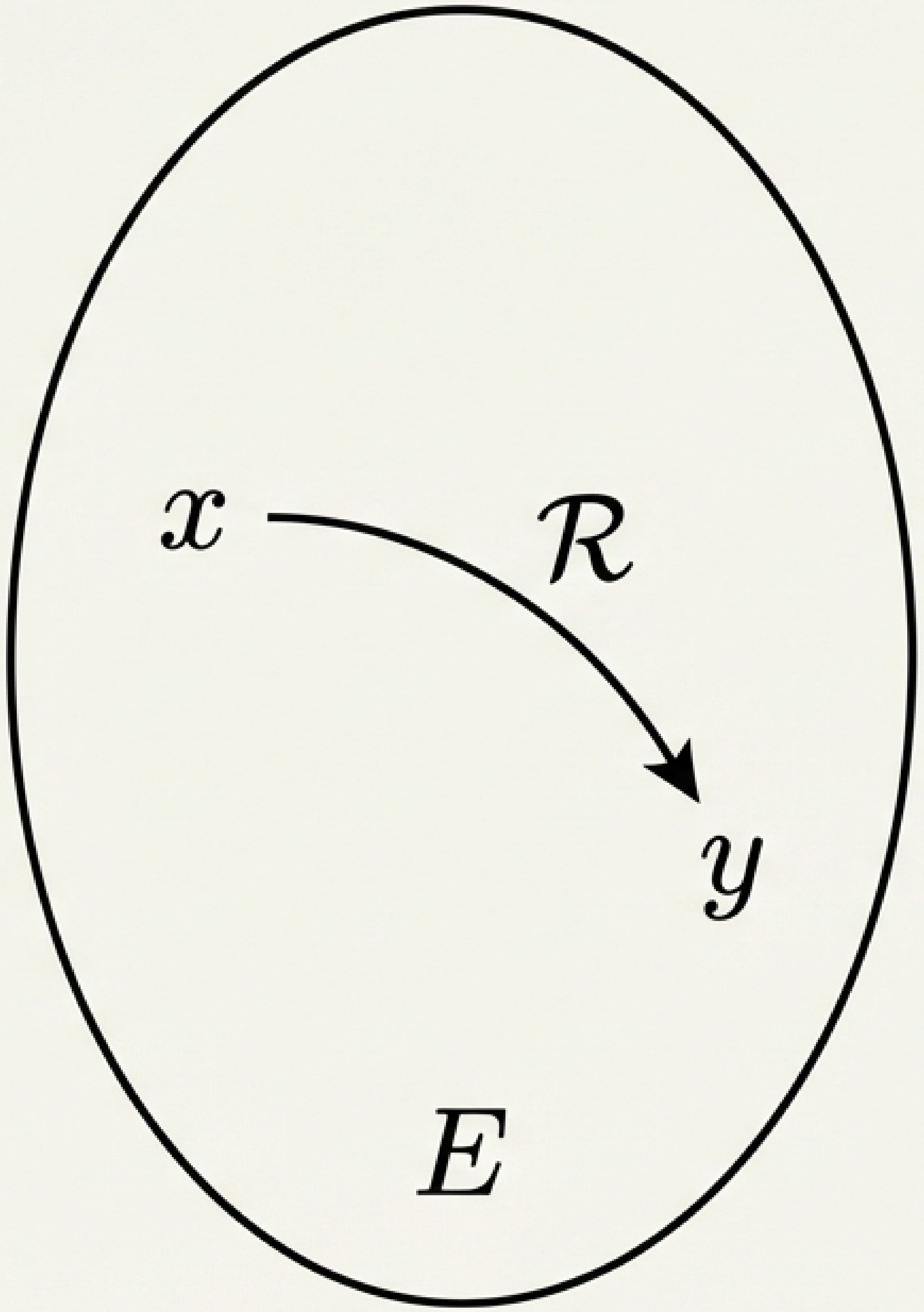
Définition de la Relation Binaire

On appelle relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E tout prédicat à deux variables défini sur le produit cartésien $E \times E$.

Notation : Pour deux éléments x et y de E, la relation est notée $x\mathcal{R}y$.

Exemples Fondamentaux :

- Dans $\mathbb{R}$: la relation d'ordre $x \leq y$ ou d'égalité $x = y$.
- Dans $\mathcal{P}(E)$: la relation d'inclusion $X \subset Y$.



Propriétés Fondamentales (1/2)

Réflexivité

Une relation est dite réflexive si tout élément est en relation avec lui-même.

$$\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$$

Symétrie

Une relation est dite symétrique si les échanges sont bidirectionnels. Si x est en relation avec y, alors y l'est avec x.

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$$

Propriétés Fondamentales (2/2)

Antisymétrie

Définition : Une relation est antisymétrique si une relation réciproque implique l'égalité. Il ne peut pas y avoir de boucle entre deux éléments distincts.

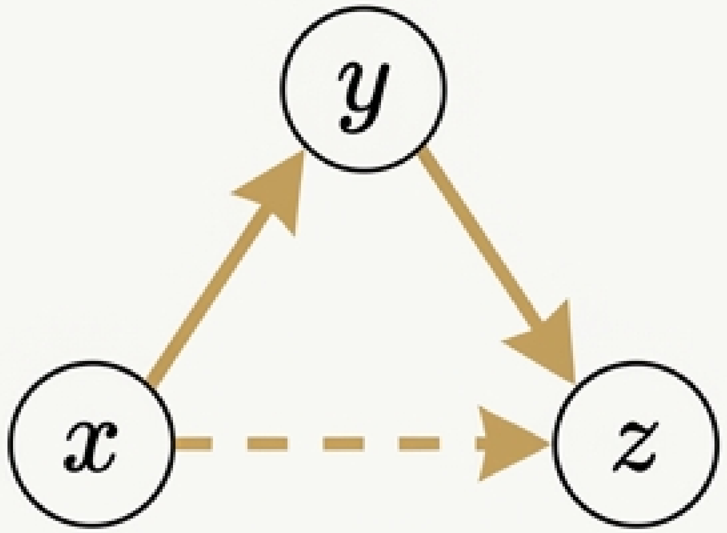
Formalism : $\forall (x, y) \in E^2, \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y$

Propriété essentielle pour les relations d'ordre.

Transitivité

Définition: Une relation est transitive si elle se propage via un intermédiaire.

Formalism : $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$



La Relation d'Équivalence

La structure de regroupement

Définition 4.3

Une relation binaire $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si elle vérifie trois propriétés :

Réflexive

Symétrique

Transitive

Concept : Elle généralise la notion d'égalité. Elle permet de classer des objets différents comme étant "similaires" selon un critère précis.

Exemple trivial : L'égalité stricte $=$ sur n'importe quel ensemble.

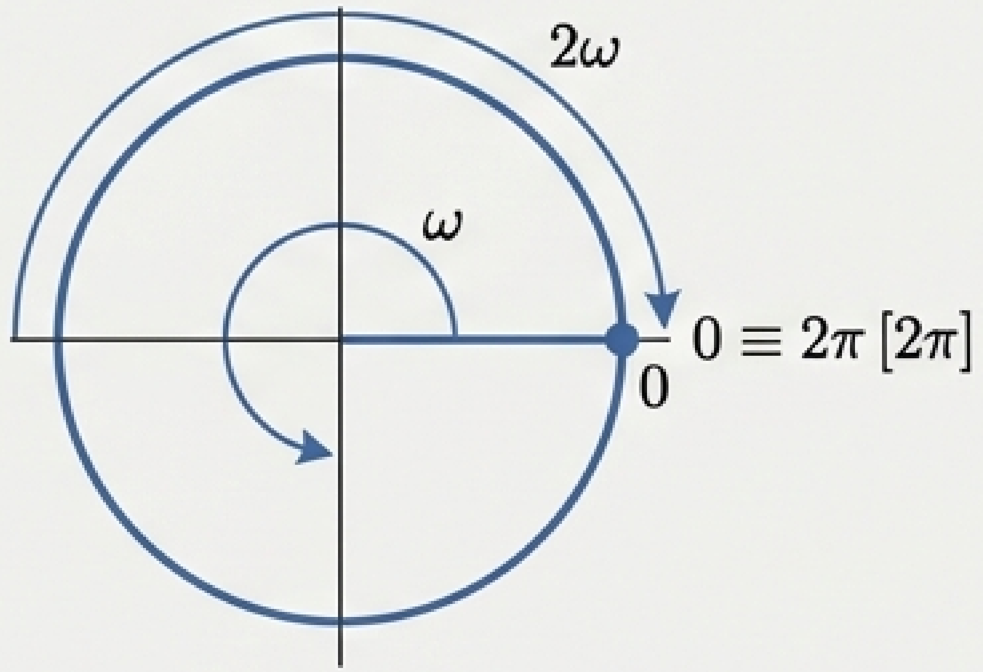
Exemples Concrets

La Congruence (Algèbre)

Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, la congruence modulo ω lie les éléments séparés par un multiple entier de ω.

Formalism: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = k\omega$

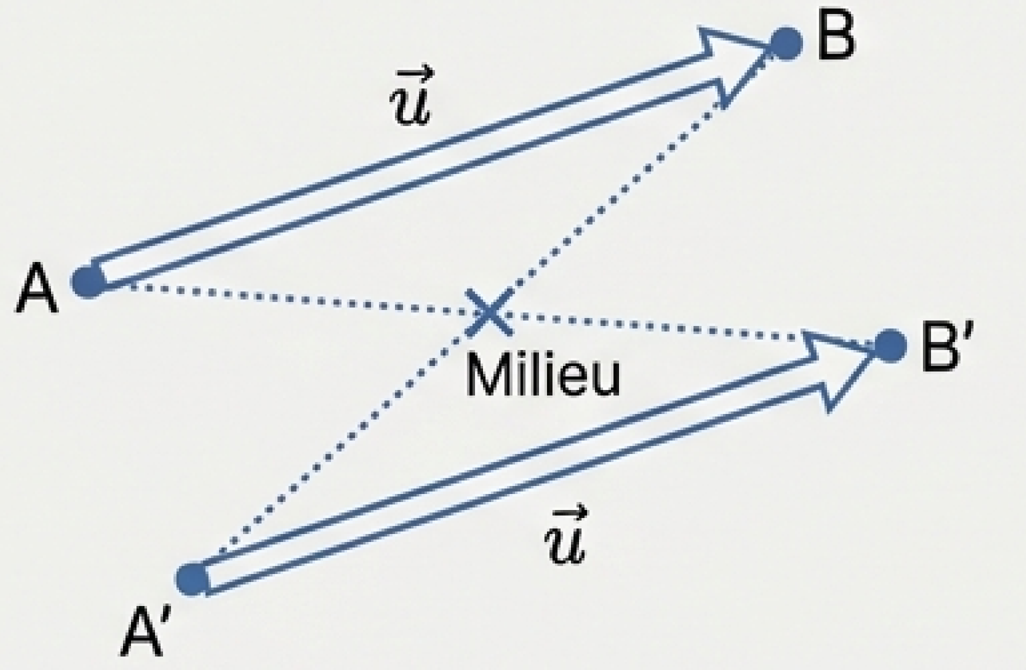
Notation: $x \equiv y \; [\omega]$



L'Équipollence (Géométrie)

Dans l'espace affine, lie des bipoints ayant le même milieu.

$(A, B)\mathcal{R}(A', B') \Leftrightarrow [AB']$ et $[A'B]$ ont même milieu



Classes d'Équivalence et Ensemble Quotient

Définition (Classe) :

La **classe d'équivalence** de x, notée $\dot{x}$, regroupe tous les éléments en relation avec x.

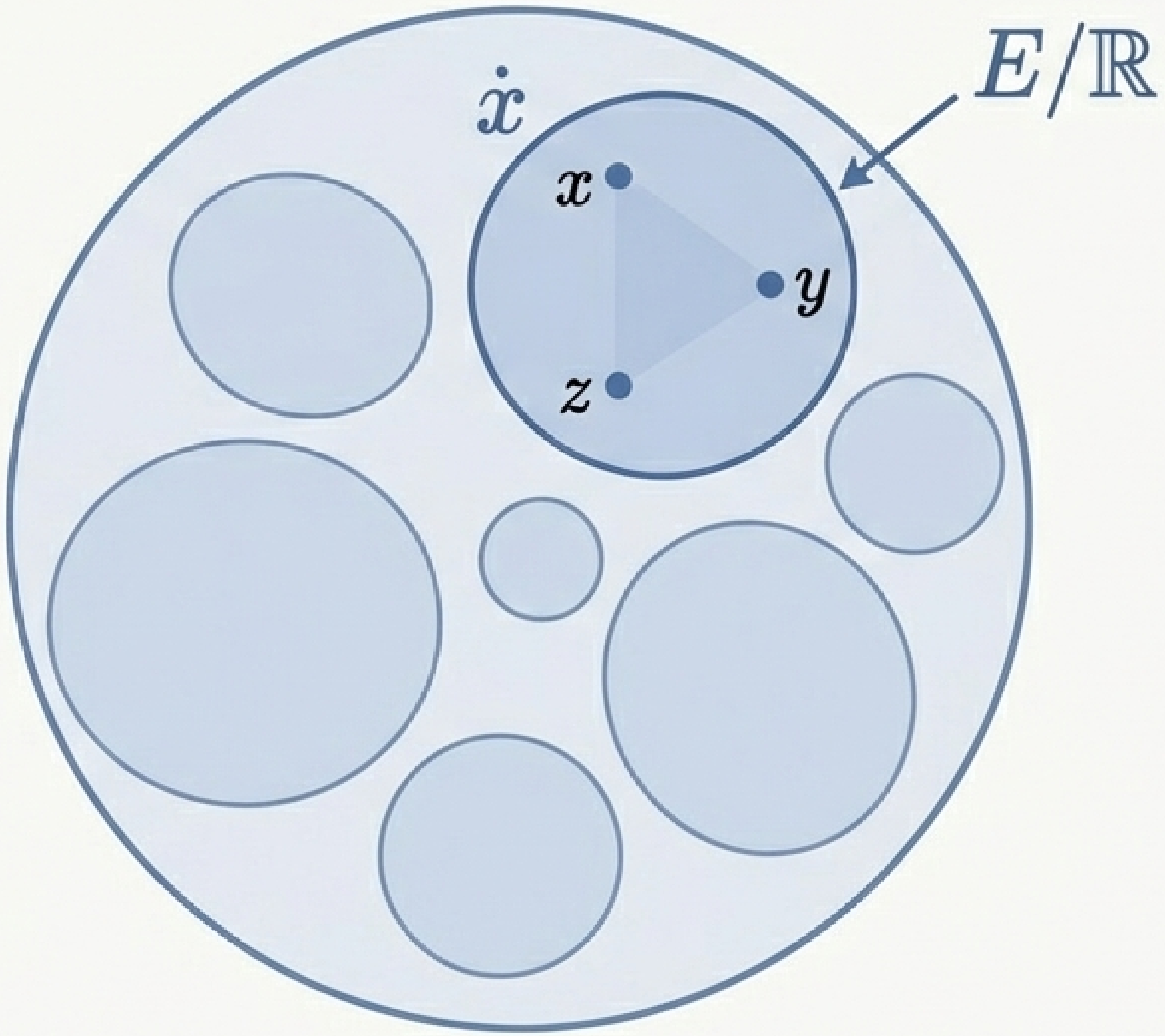
$$\dot{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

Définition (Quotient) :

L'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ est l'ensemble de ces classes.

Exemple :

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour la congruence modulo n.



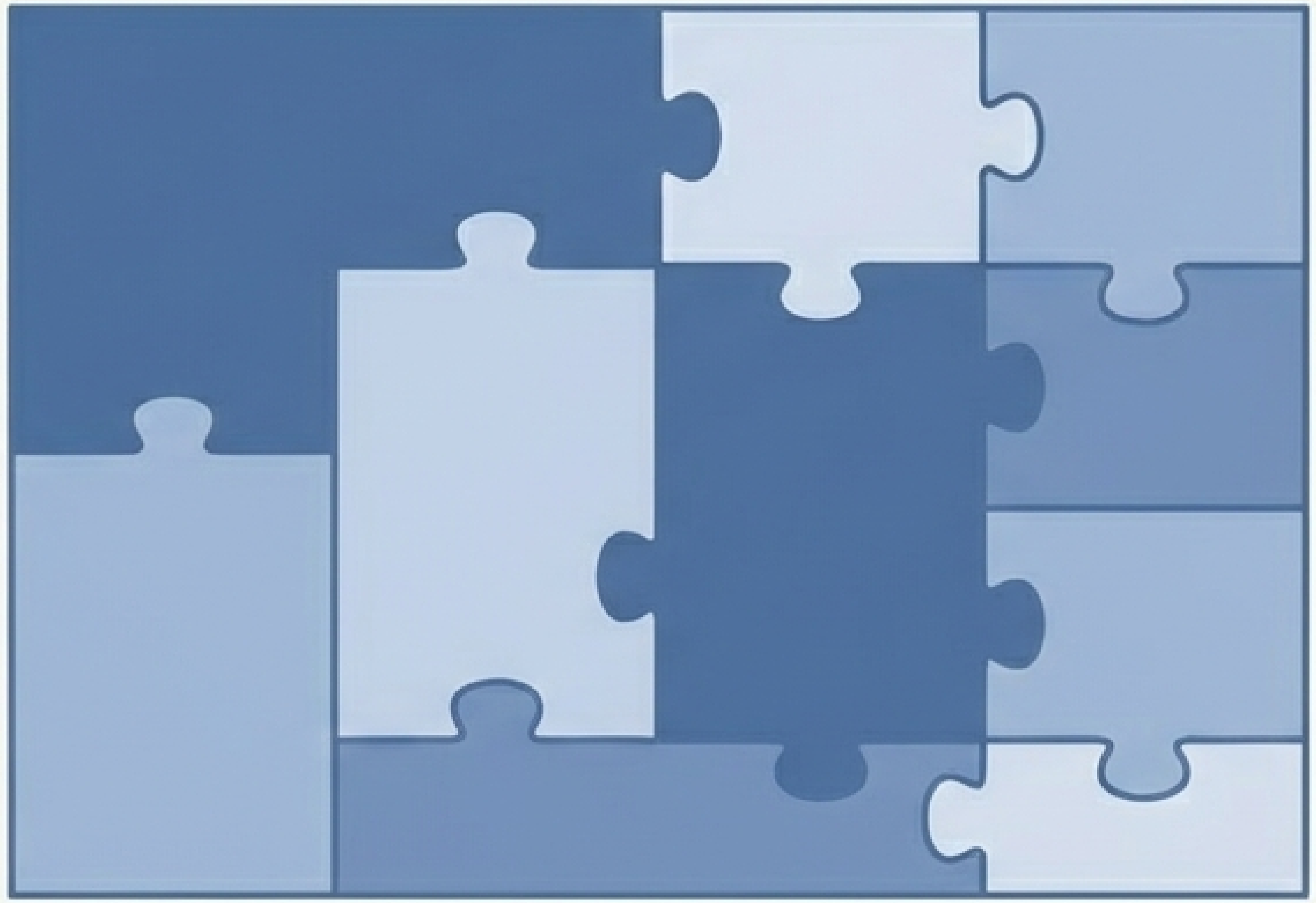
Théorème Fondamental : La Partition

Proposition 4.1 : Les affirmations suivantes sont identiques :

1. $x\mathcal{R}y$
2. $y \in \dot{x}$
3. $\dot{x} = \dot{y}$

Théorème 4.2 : L'ensemble quotient forme une **partition** de E.

- Les classes sont non vides.
- Les classes sont disjointes ($A \cap B = \emptyset$ si $A \neq B$).
- La réunion des classes couvre tout l'ensemble E.



La Relation d'Ordre

La structure de hiérarchie

Définition 4.6

Une relation binaire est une **relation d'ordre** si elle est :

- Réflexive
- **Antisymétrique** (Différence Clé)
- Transitive

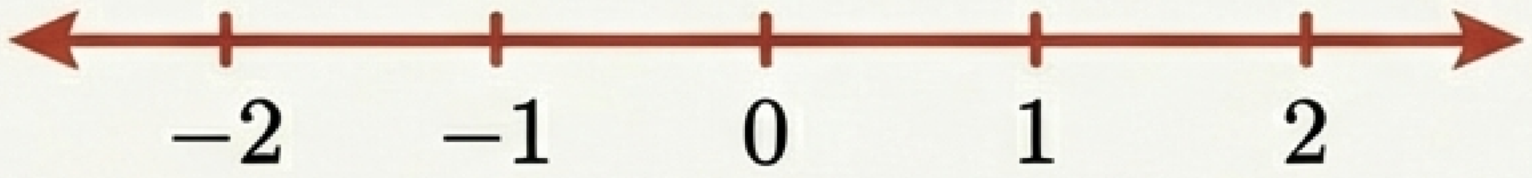
Notation : $x \lesssim y$ ou $x \leq y$.

Types d'Ordre :

- **Total** : Deux éléments sont toujours comparables.
- **Partiel** : Il existe des éléments non comparables.

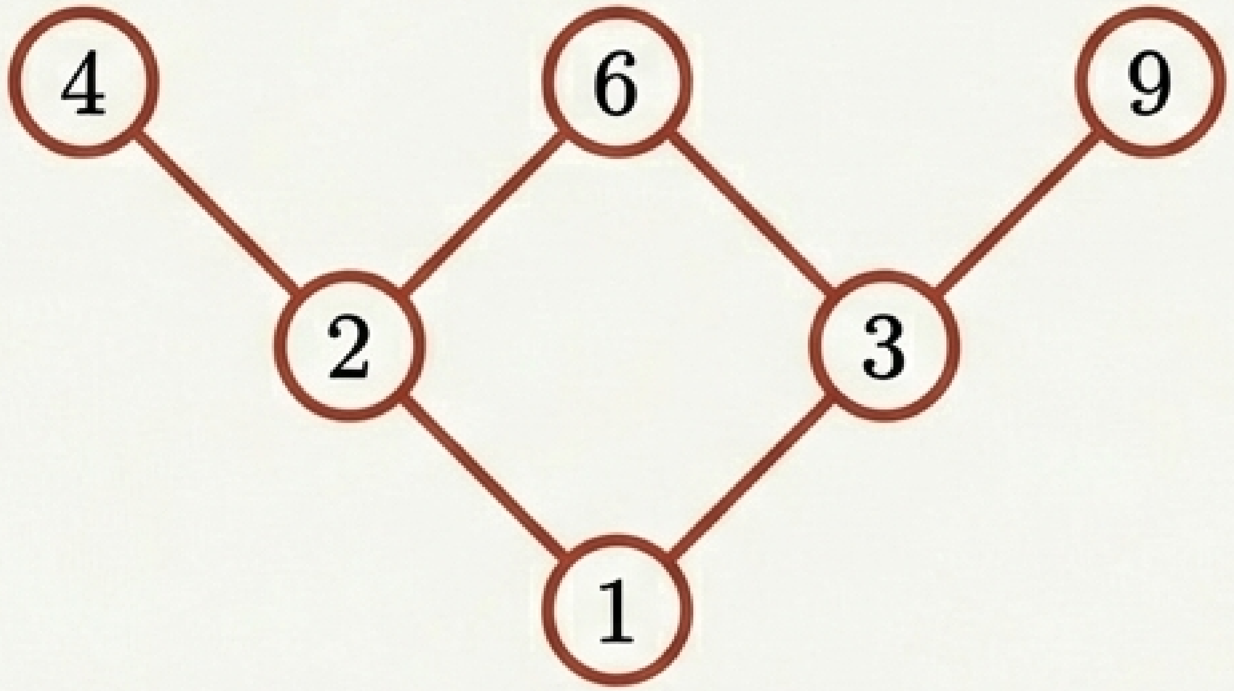
Ordre Total vs Ordre Partiel

Ordre Total ($\mathbb{R}$)



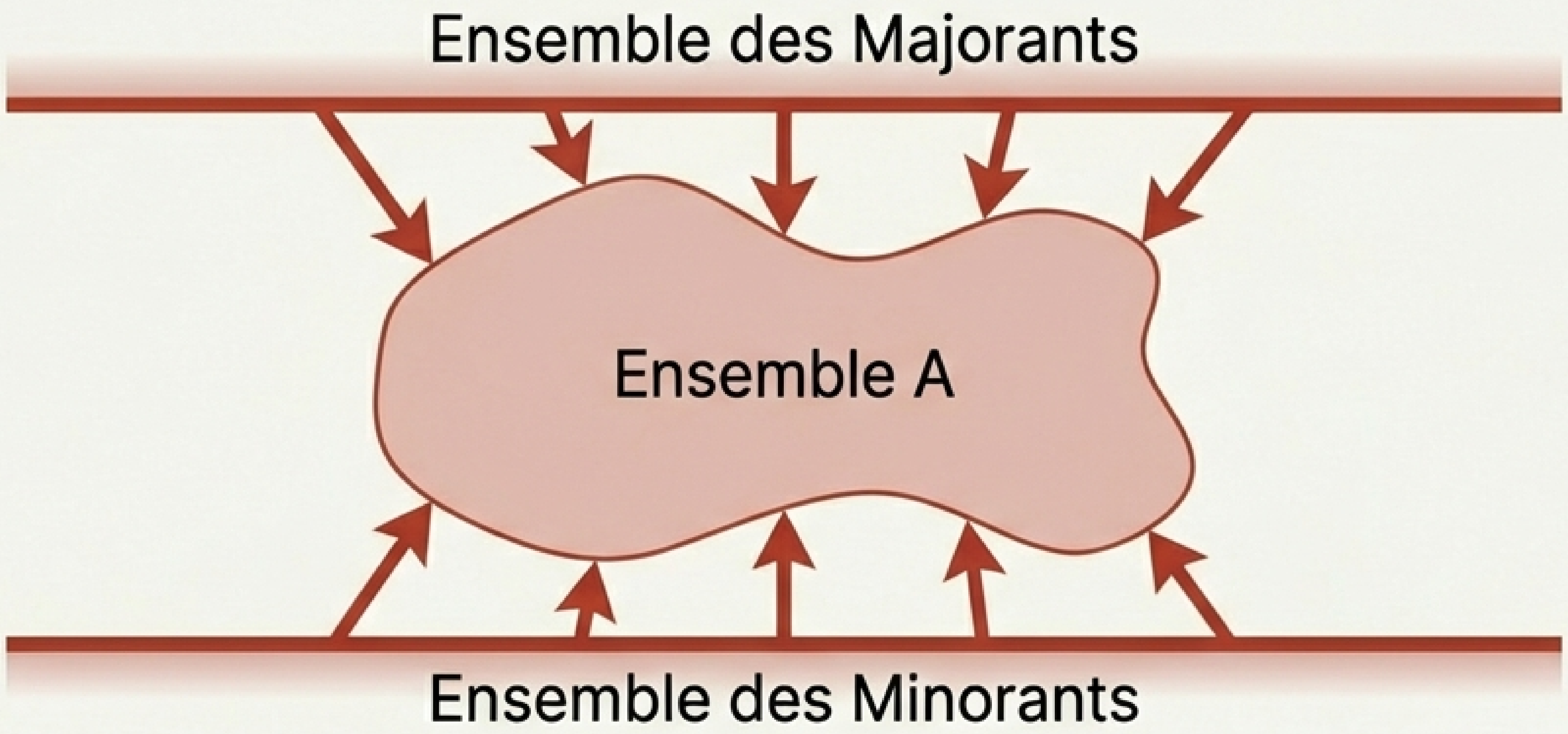
L'inégalité usuelle $\leq$ dans $\mathbb{R}$. Tous les éléments sont alignés sur une même ligne. Pour tout x, y, soit $x \leq y$, soit $y \leq x$.

Ordre Partiel (Divisibilité dans $\mathbb{N}^*$)



La divisibilité $a|b$. Structure en branches. **Non-comparabilité** : 2 ne divise pas 3, et 3 ne divise pas 2. Ils sont sur des branches séparées.

Majorants et Minorants



Définition 4.8 :

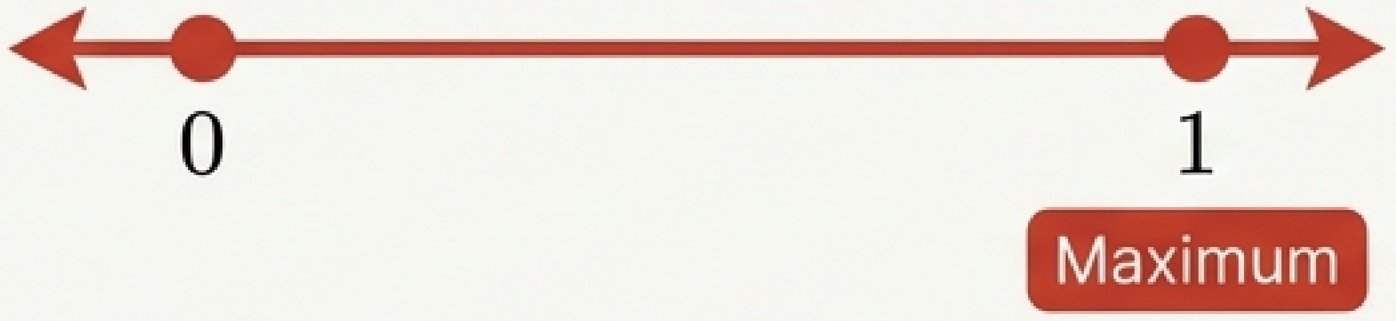
- **Majorant** (M) : $\forall a \in A, a \leq M$.
- **Minorant** (m) : $\forall a \in A, m \leq a$.

Nuance : Dire que 'A est majorée' signifie qu'il *existe* un majorant.
L'intervalle [0,1] est majoré par 1, 2, 10, etc.

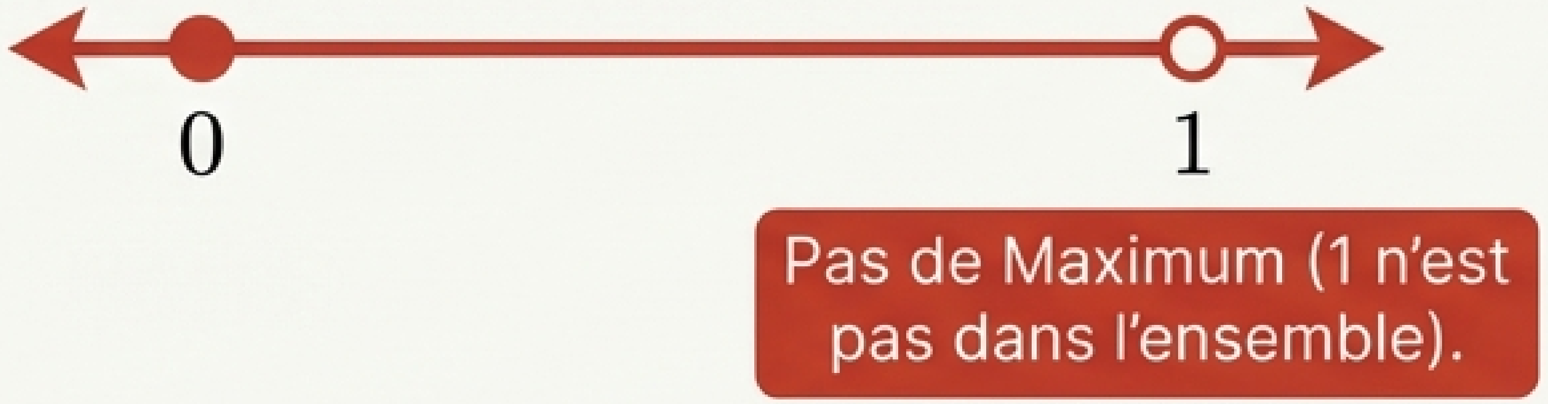
Plus Petit et Plus Grand Élément

Définition 4.9 : Le Maximum et le Minimum sont des bornes qui **appartiennent** à l'ensemble.
Maximum : M est un majorant ET $M \in A$.
Minimum : m est un minorant ET $m \in A$.

[0,1] (Closed Interval)



[0,1[(Half-open Interval)

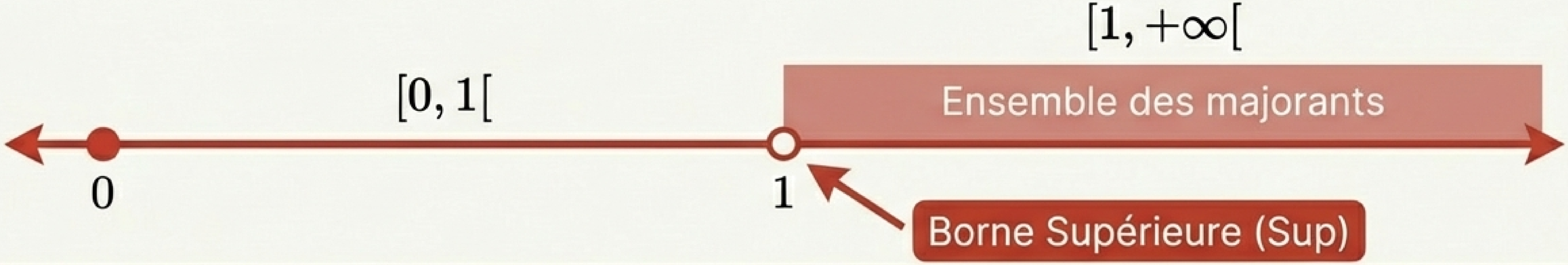


Borne Supérieure et Borne Inférieure

Définition 4.10 : La **Borne Supérieure** ($\sup(A)$) est le plus petit des majorants.

$$\sup(A) = \min\{M \in E \mid M \text{ est majorant de } A\}$$

Concept : C'est la limite 'théorique' qui ferme l'ensemble, même si elle n'en fait pas partie.



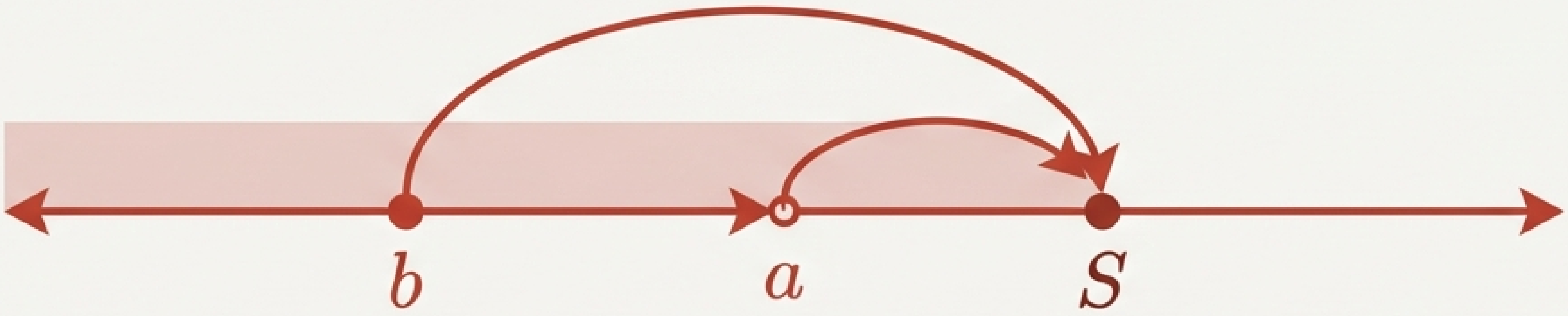
Pour $[0, 1[$, les majorants sont $[1, +\infty[$. Le plus petit est 1. Donc $\sup([0, 1[) = 1$.

Caractérisation de la Borne Supérieure

Proposition 4.3 : Pour prouver que $S = \sup(A)$, il faut vérifier deux conditions :

1. **C'est un majorant** : $\forall a \in A, a \leq S$.
2. **C'est le plus petit** : Tout élément plus petit que S échoue à majorer A.

$$\forall b < S, \quad \exists a \in A \text{ tel que } b < a$$



Théorème 4.4 : $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure (toute partie bornée admet une borne sup).

Synthèse : Équivalence vs Ordre

	Relation d'Équivalence	Relation d'Ordre
Propriétés	Réflexive, Symétrique, Transitive	Réflexive, **Antisymétrique**, Transitive
Symbole	$\sim, \equiv$	$\leq, \preccurlyeq$
Structure	Partition (Classes disjointes)	Hiérarchie (Comparaison)
Concepts Clés	Classe, Représentant, Quotient	Majorant, Min/Max, Sup/Inf

Ces deux structures forment la base axiomatique de l'analyse mathématique et de l'algèbre moderne.