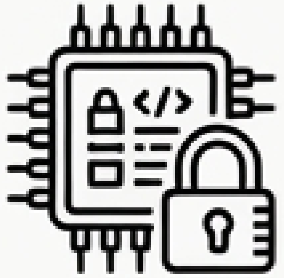
Combinatoire & Dénombrement

L'art de quantifier les possibles

Compter de petites quantités relève de l'intuition. Dénombrer de vastes ensembles relève de la science. Née de l'étude des jeux de hasard avec Blaise Pascal et Pierre Fermat au XVIIᵉ siècle, l'analyse combinatoire est aujourd'hui le moteur des probabilités, de l'informatique et de la cryptographie.

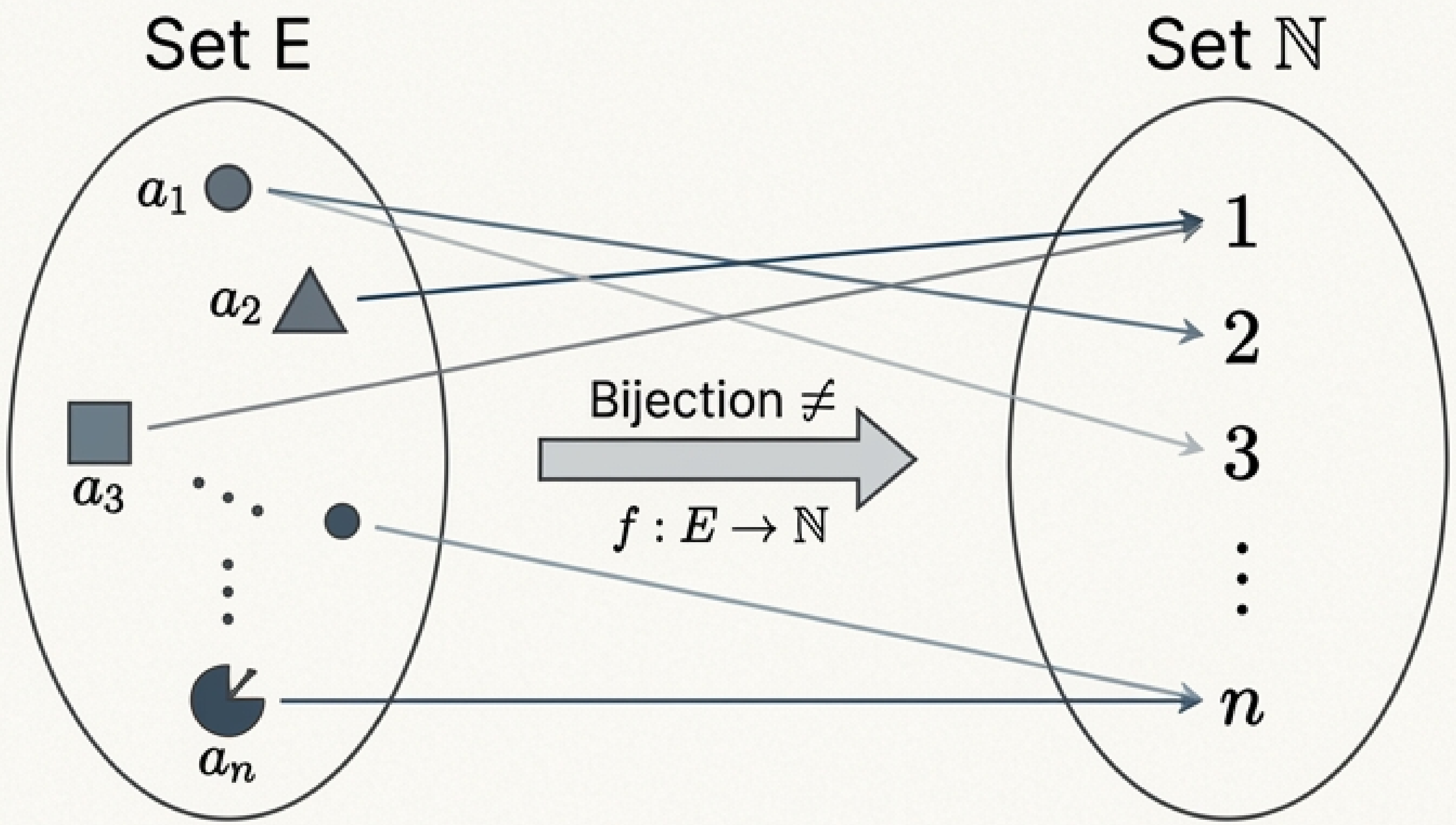
Pile ou Face
4 issues (2 lancers)

Urne (10 boules parmi 25)
3 268 760 issues



Clé Cryptographique
10^{77} issues

Les Fondations : Ensembles Finis et Cardinaux



Définition

Un ensemble E est **fini** s'il existe une bijection entre lui et l'ensemble des entiers $\{1, \ldots, n\}$.

Le Cardinal

Cet entier n est unique. On l'appelle le cardinal.

$$Card(E) = n \text{ ou } |E| = n$$

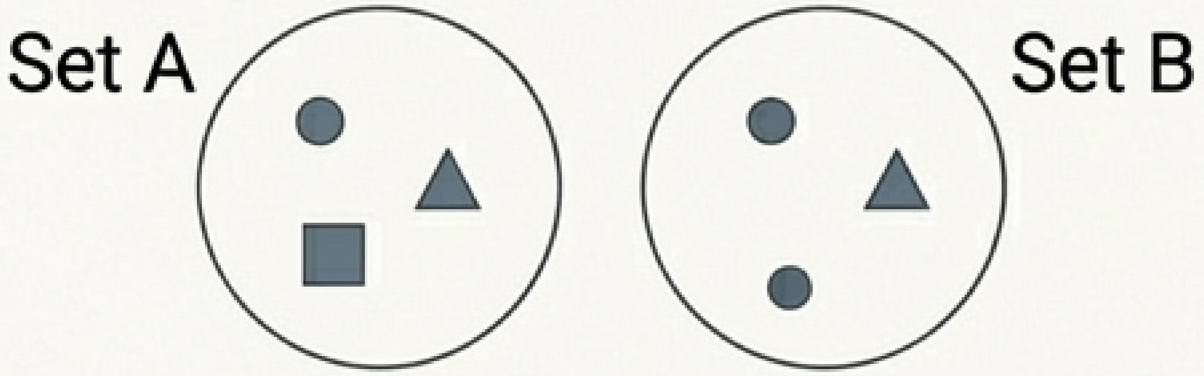
Exemples

- $Card(\emptyset) = 0$
- Singleton : ensemble où $Card(E) = 1$

Compter, c'est étiqueter. Si un ensemble F est en bijection avec E, alors ils partagent le même cardinal.

Le Moteur Logique (1) : Principe Additif

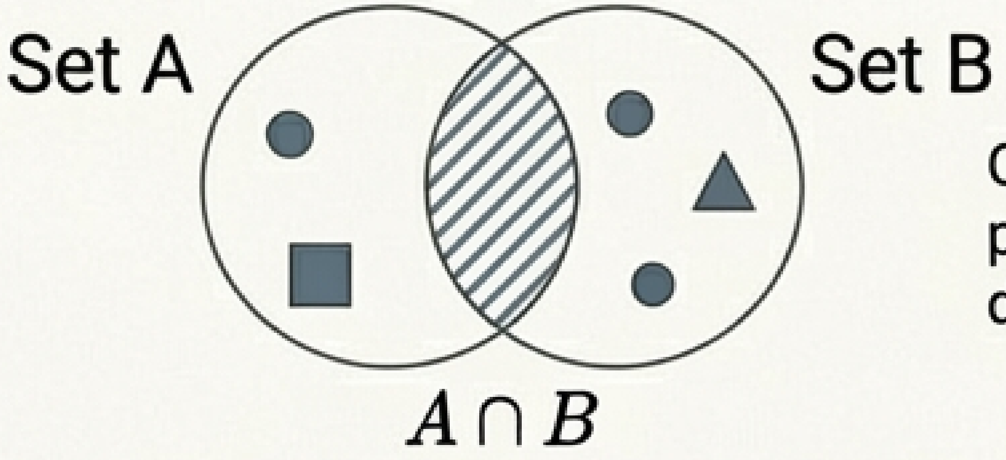
Disjoints



Si $A \cap B = \emptyset$ (Disjoints)

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$$

Cas Général (Inclusion-Exclusion)



On soustrait l'intersection pour ne pas la compter deux fois.

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

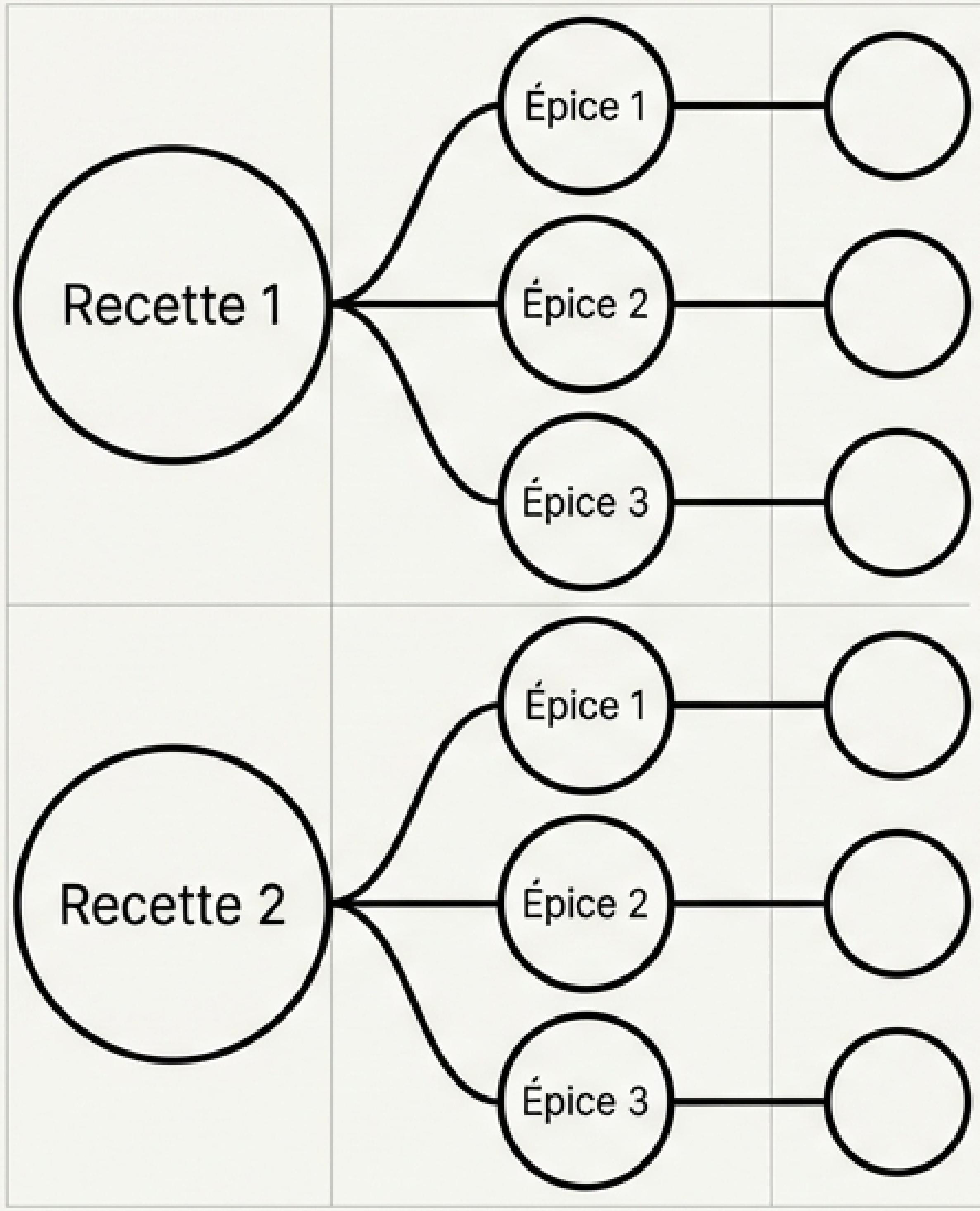
L'Exemple du Sondage

- Oui à Q1 (A) : 65
- Oui à Q2 (B) : 51
- Oui aux deux ($A \cap B$) : 46

$65 + 51 - 46 = 70$ personnes ont dit Oui au moins une fois.

Le Moteur Logique (2) : Principe Multiplicatif

Menu du Chef



$2 \times 3 = 6$
plats uniques.

Définition (Produit Cartésien)

L'ensemble $A \times B$ est l'ensemble de tous les couples (a, b).

La Règle

Si une situation implique n choix successifs...

$$Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$$

Généralization

$$Card(\prod A_k) = \prod Card(A_k)$$

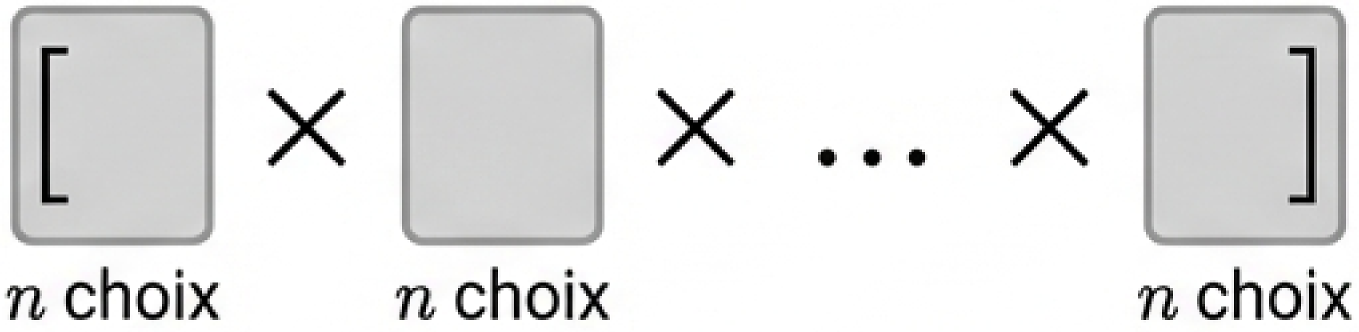
C'est le moteur de l'explosion combinatoire.
Les choix se multiplient, ils ne s'additionnent pas.

C'est le moteur de l'explosion combinatoire.
Les choix se multiplient, ils ne s'additionnent pas.

Configuration 1 : Listes avec Répétitions (p-listes)

ORDRE : OUI | RÉPÉTITION : OUI

Digicode



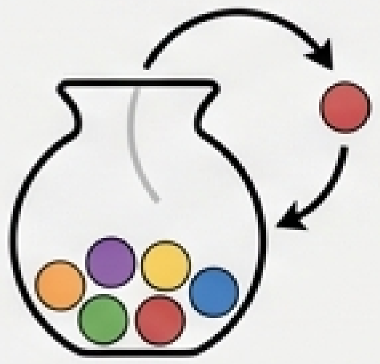
Définition

Une suite ordonnée de k éléments choisis dans un ensemble de taille n. La **répétition est autorisée.**

$$n^k$$

Logique

Choix 1 (n) × Choix 2 (n) × ... × Choix k (n)



L'Urne (Tirage avec remise)

Tirer 3 boules successivement, en remettant la boule à chaque fois.

n^3

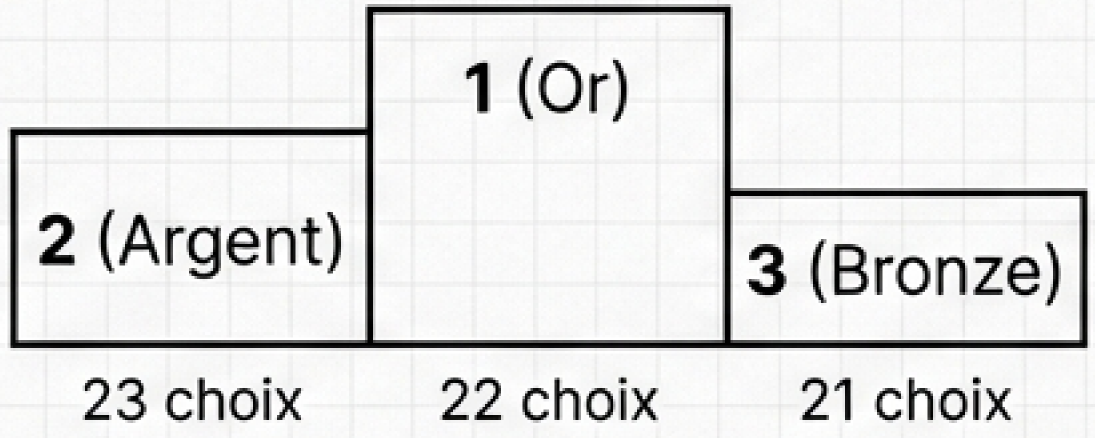
Le Code Binaire

Un octet de longueur n avec les chiffres $\{0, 1\}$.

2^n

ORDRE : **OUI** | RÉPÉTITION : **NON**

Configuration 2 : Listes sans Répétition (Arrangements)



$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Définition

Une suite ordonnée de k éléments *distincts* d'un ensemble de taille n.

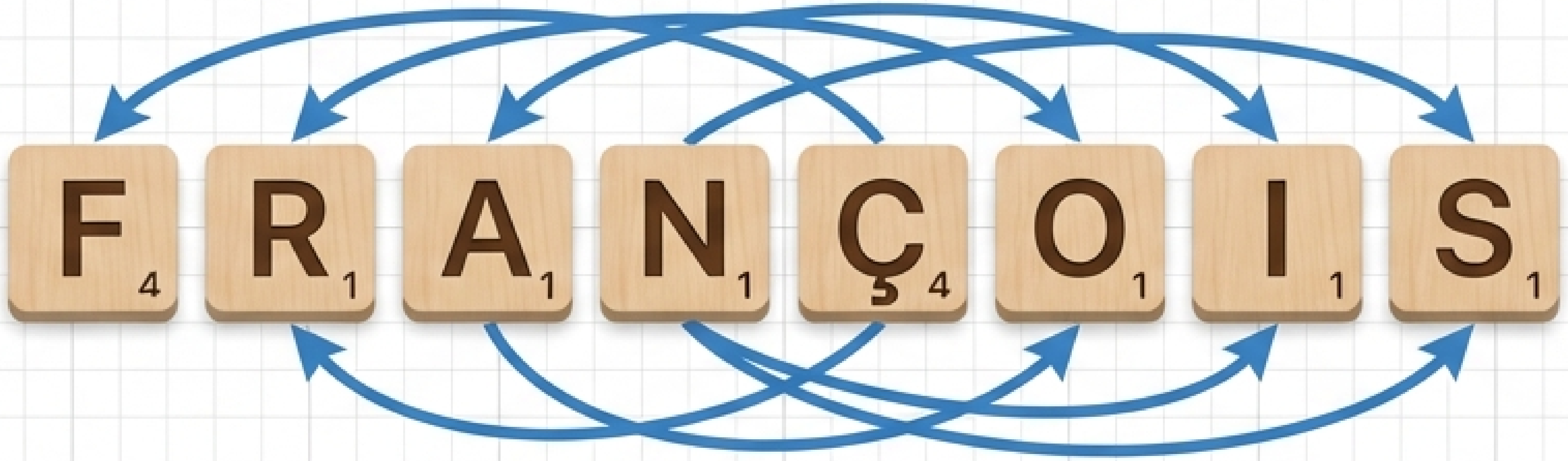
Logique

$n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)$

Calcul pour le podium (23 coureurs) : $23 \times 22 \times 21 = 10,626$ issues.

Configuration 3 : Permutations (L'Ordre Total)

ORDRE : OUI | $n = k$

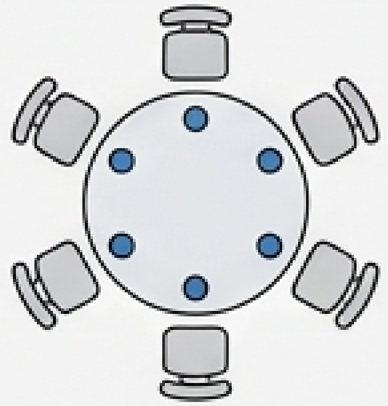


Définition
Organiser la totalité des éléments d'un ensemble.
C'est une bijection de l'ensemble sur lui-même.

$$P_n = n!$$

Factorielle

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$$



Dîner assis
Placer 6 invités sur 6 chaises.

$6! = 720$ possibilités.

Anagrammes
Mélanger les 8 lettres distinctes de FRANÇOIS.

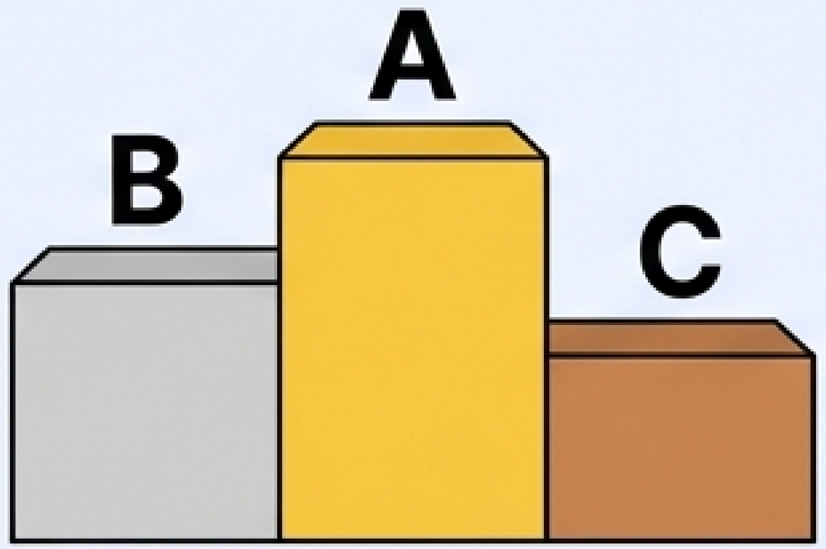
$8! = 40{,}320$ anagrammes.

NotebookLM

La Question Pivot : L'Ordre compte-t-il ?

OUI (Ordonné)

Listes, Arrangements, Permutations



$$(A, B, C) \neq (C, B, A)$$

La position définit le résultat.

NON (Non-Ordonné)

Combinaisons (Sous-ensembles)

$$\{A, K, Q\} = \{Q, A, K\}$$

Le contenu seul définit le résultat.

Pour compter des ensembles non-ordonnés, nous devons diviser nos résultats précédents pour éliminer la redondance de l'ordre.

Configuration 4 : Les Combinaisons

ORDRE : **NON** | RÉPÉTITION : **NON**

Choix Ordonnés

$$\binom{n}{k} = \frac{\text{Arrangements}}{\text{Permutations}} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

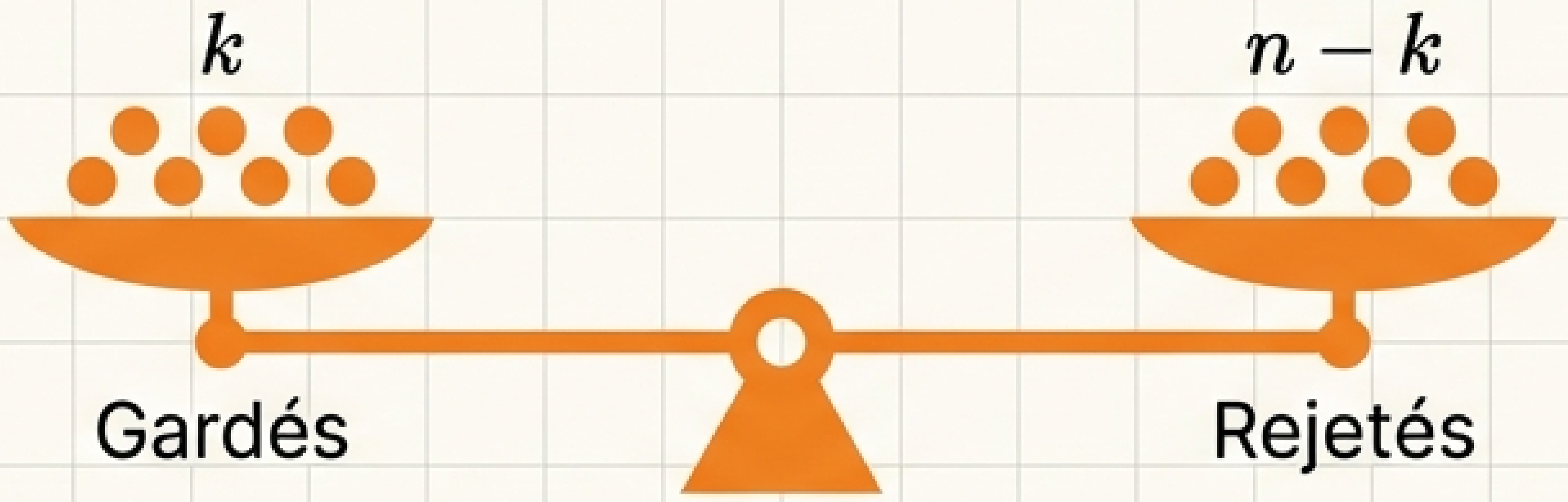
Suppression de l'ordre

Définition : Un sous-ensemble (non-ordonné) de k éléments.

Notation : $\binom{n}{k}$ (se lit 'k parmi n')

$\binom{n}{1} = n$ (Choisir 1)	$\binom{n}{n} = 1$ (Tout choisir)	$\binom{n}{0} = 1$ (Ensemble vide)

Propriétés : La Symétrie du Choix



$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Choisir k éléments à garder revient exactement à choisir $n - k$ éléments à jeter.

Example Box (Poker)

Tirage de 5 cartes parmi 32.
Mains avec 0 Roi (choisir 5 parmi les 28 autres cartes) :

$$\binom{28}{5} = 98{,}280$$

Le Triangle de Pascal

n=0 1

n=1 1 1

n=2 $\boxed{1}$ + $\boxed{2}$ 1

n=3 1 $\boxed{3}$ 3 1

n=4 1 4 6 4 1

n=5 1 5 10 10 5 1

Relation de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Chaque nombre est la somme des deux nombres situés juste au-dessus.

Construction sans formule :
On commence par 1 au sommet.
On additionne ligne par ligne.

Le Binôme de Newton

Le pont entre la combinatoire et l'algèbre.

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Example Expansion for $(a+b)^3$: $1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

1 3 3 1

Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ qui servent à compter des ensembles sont les mêmes que ceux qui développent les puissances de polynômes.

Applications du Binôme

La Somme des Coefficients

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

Si on pose $a = 1, b = 1$.

Le nombre total de sous-ensembles d'un ensemble (l'ensemble des parties $P(E)$) est égal à 2^n.

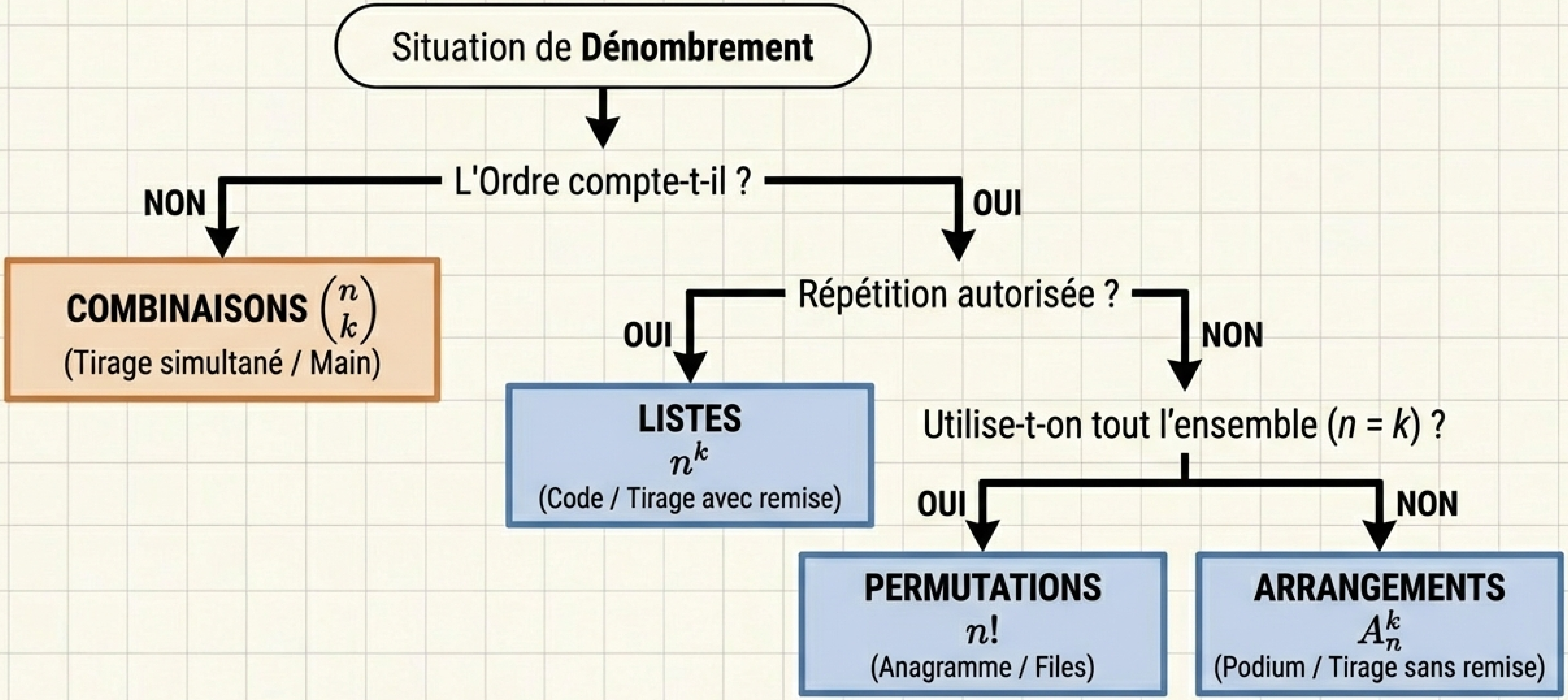
Inégalité de Bernoulli

$$\boxed{(1+a)^n \geq 1 + na}$$

Pour $a \geq 0$.

Une démonstration puissante dérivée directement de l'expansion binomiale.

Arbre de Décision & Synthèse



Conclusion : La Grammaire du Hasard

- Nous avons transformé l'intuition de comptage en structure algébrique rigoureuse.
- Du principe additif simple au Binôme de Newton, chaque outil répond à une contrainte (ordre, répétition, regroupement).
- Applications : Calcul de probabilités (Poker), Sécurité (Cryptographie), Algorithmes.

« L'analyse combinatoire ne compte pas seulement des objets; elle structure notre compréhension du réel. »