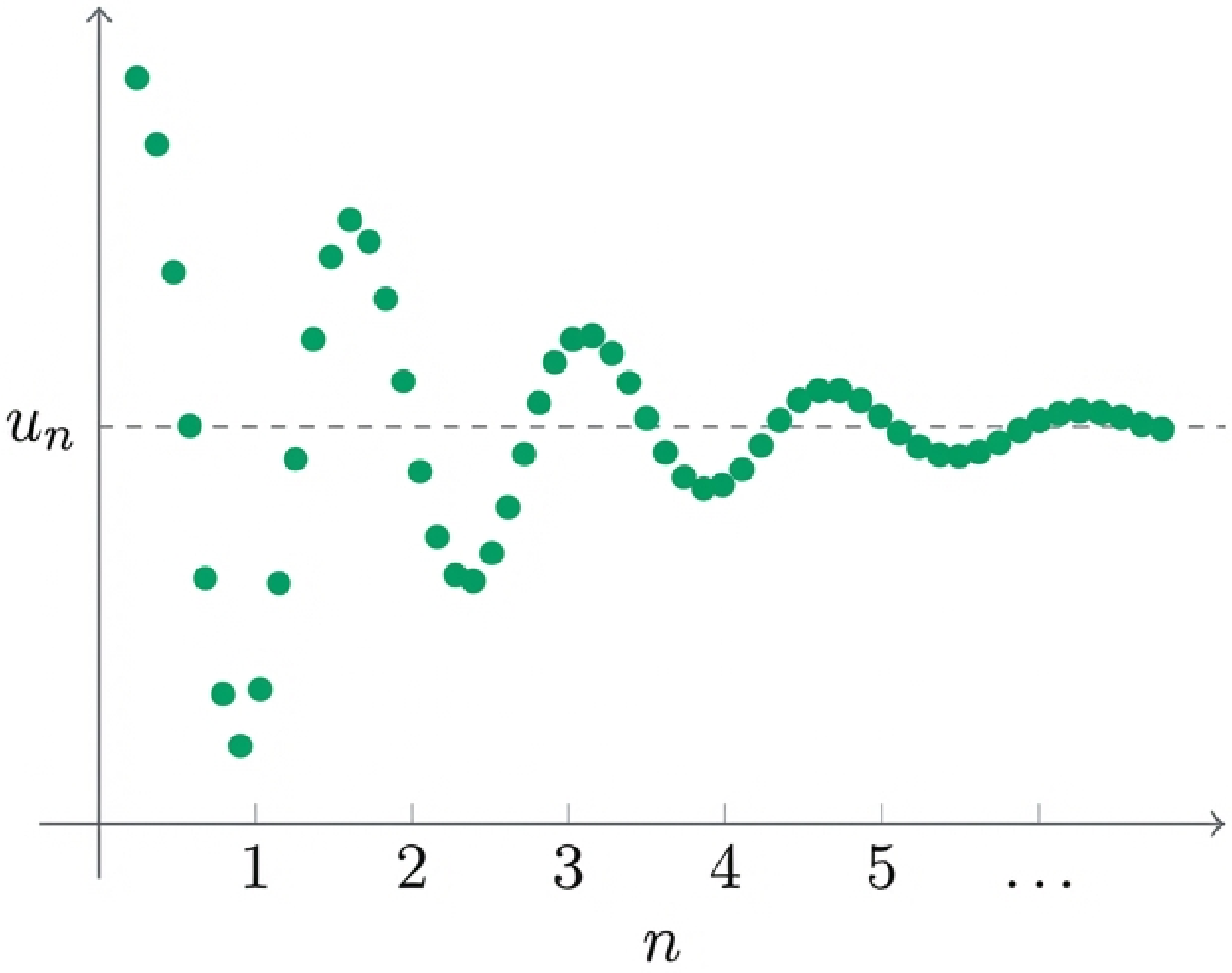
Chapitre 8 : Les Suites Numériques

De l'intuition discrète à la rigueur de l'infini

Mathématiques Discrètes • Analyse Réelle



THEORY

Le Processus Discret

Définition

Une suite est une fonction définie sur $\mathbb{N}$. Contrairement aux fonctions réelles, la notion d'intervalle, de dérivée ou de limite en un point n'a pas de sens. Seule l'étude en $+\infty$ est pertinente.

Héritage Historique

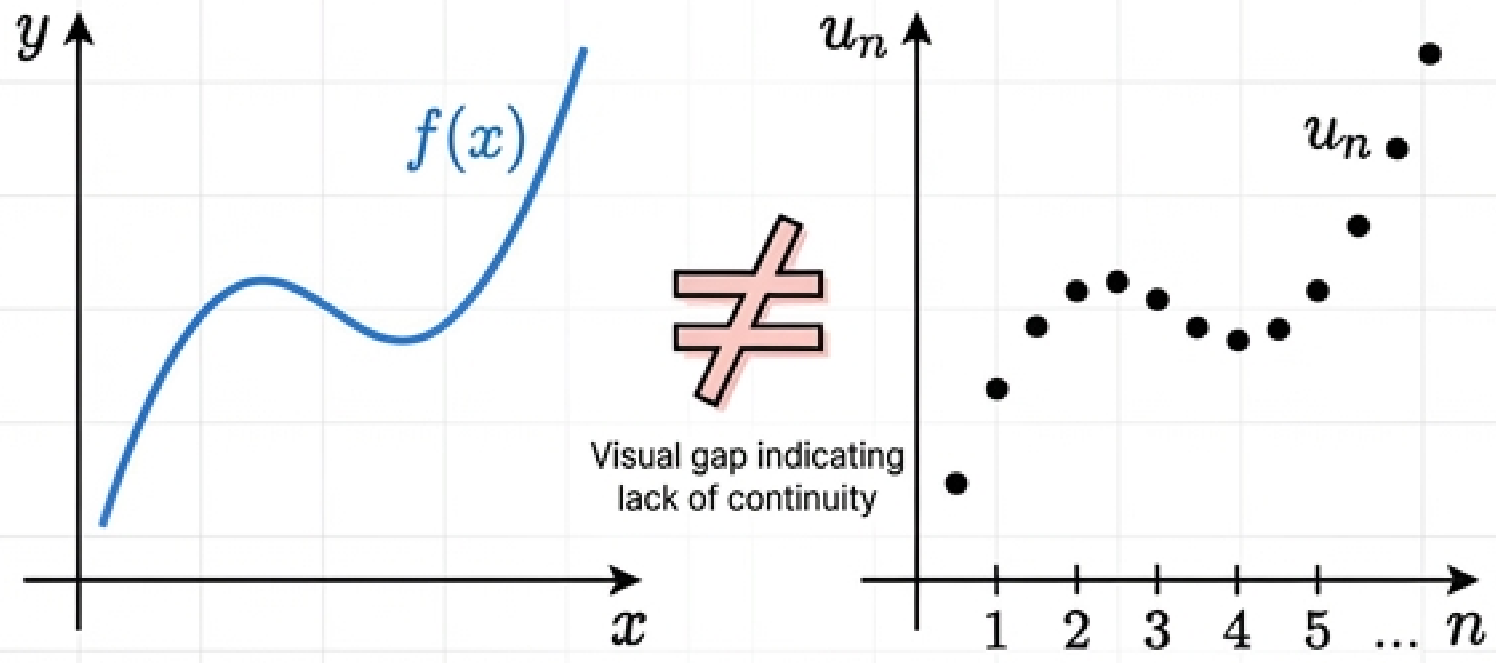
- Archimède : Encadrement de π (Méthode d'exhaustion).
- Cauchy & Peano : Formalisation de la rigueur moderne (XIXe siècle).

CONTEXT/VISUALS

Contextes d'Application

- Modèles d'évolution (Fibonacci, Démographie)
- Numérique et Traitement du Signal
- Théorie du Chaos (Fractales)

Continu vs Discret



ANNOTATION

L'Approche Intuitive

Exemple : $u_n = 2 + \frac{1}{n}$

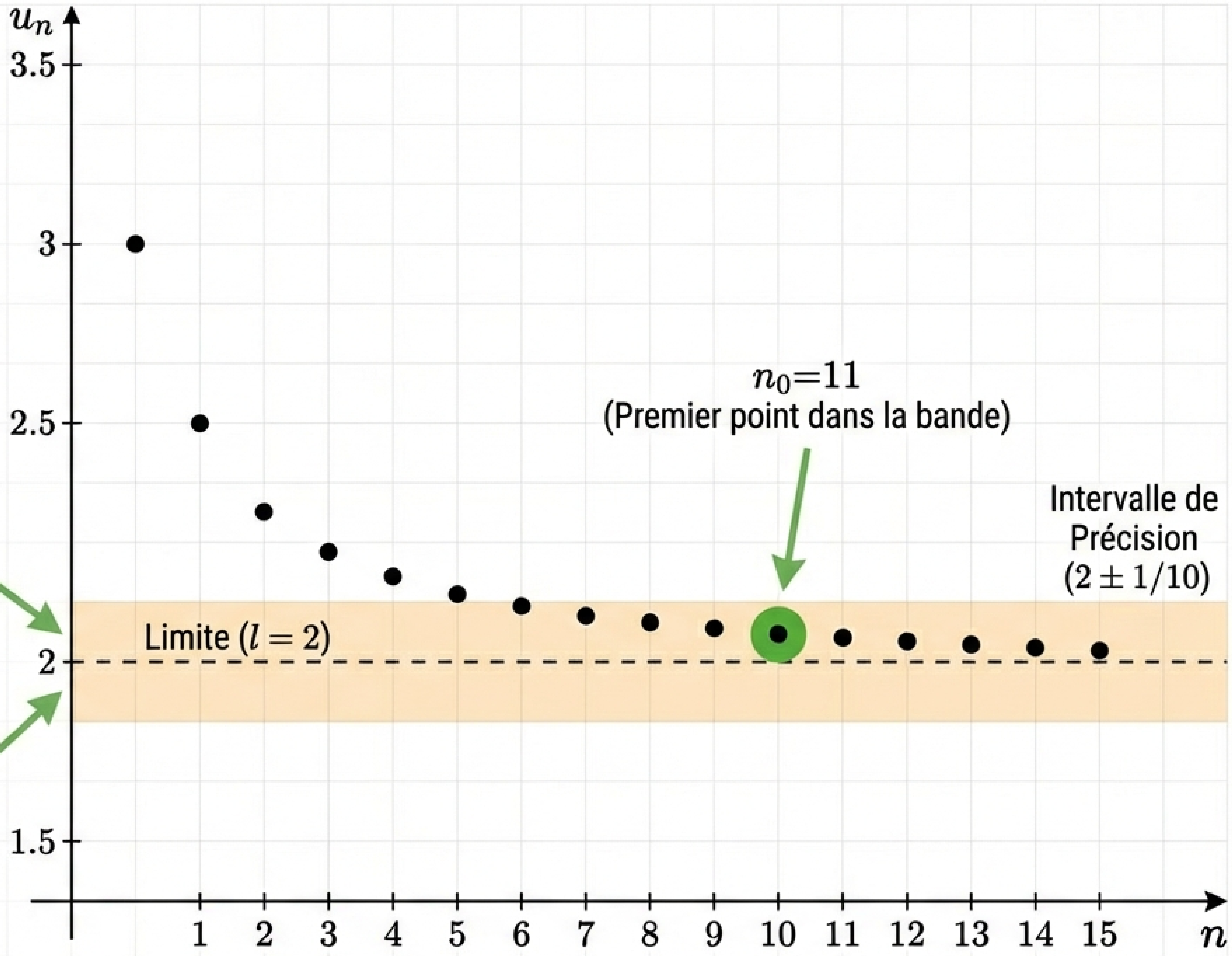
Problème : À partir de quel rang n_0 est-on à une distance $< \frac{1}{10}$ de la limite ?

Condition :

$$|u_n - 2| < \frac{1}{10} \iff \left|\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{10}$$

Résultat : $n > 10 \Rightarrow n_0 = 11$

Insight : À partir de n_0, les termes sont piégés dans l'intervalle de précision.



La Définition Formelle

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \iff \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \epsilon$$

Le Défi ($\forall \epsilon > 0$)

Quel que soit le niveau de précision arbitrairement petit choisi.

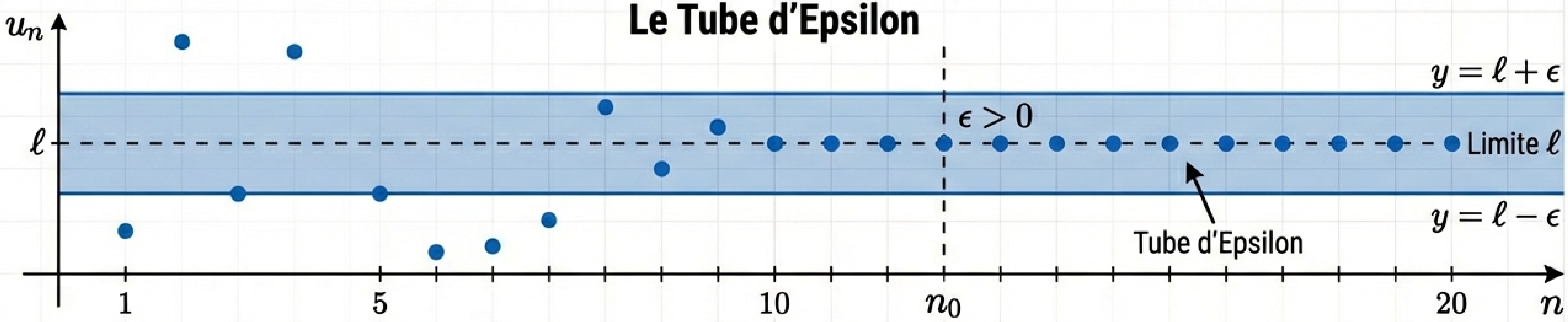
La Réponse ($\exists n_0$)

On peut **toujours** trouver un seuil (rang) à partir duquel...

Le Constat ($|u_n - \ell| < \epsilon$)

...la distance à la limite devient négligeable (reste dans le tube).

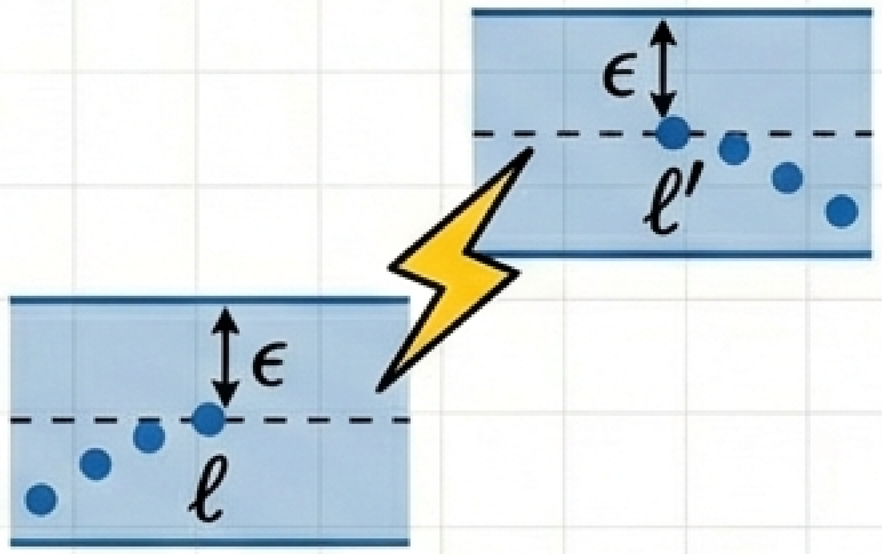
Le Tube d'Epsilon



Unicité et Suites de Référence

Théorème d'Unicité : Si une suite converge, sa limite est unique.

Preuve (esquisse) : Si $\ell \neq \ell'$, on choisit $\epsilon = \dfrac{|\ell - \ell'|}{4}$.
Les voisinages seraient disjoints, impossible pour une même suite à partir d'un certain rang.



Suites de Référence (Briques Élémentaires)

Suite (u_n)	Limite	Condition
$\frac{1}{n}$	0	Preuve : $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1$
$\frac{1}{n^k}$	0	Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$
$\frac{1}{\sqrt{n}}$	0	Croissance lente mais convergence vers 0

Opérations sur les Limites Finies

Soient deux suites convergentes : $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$.

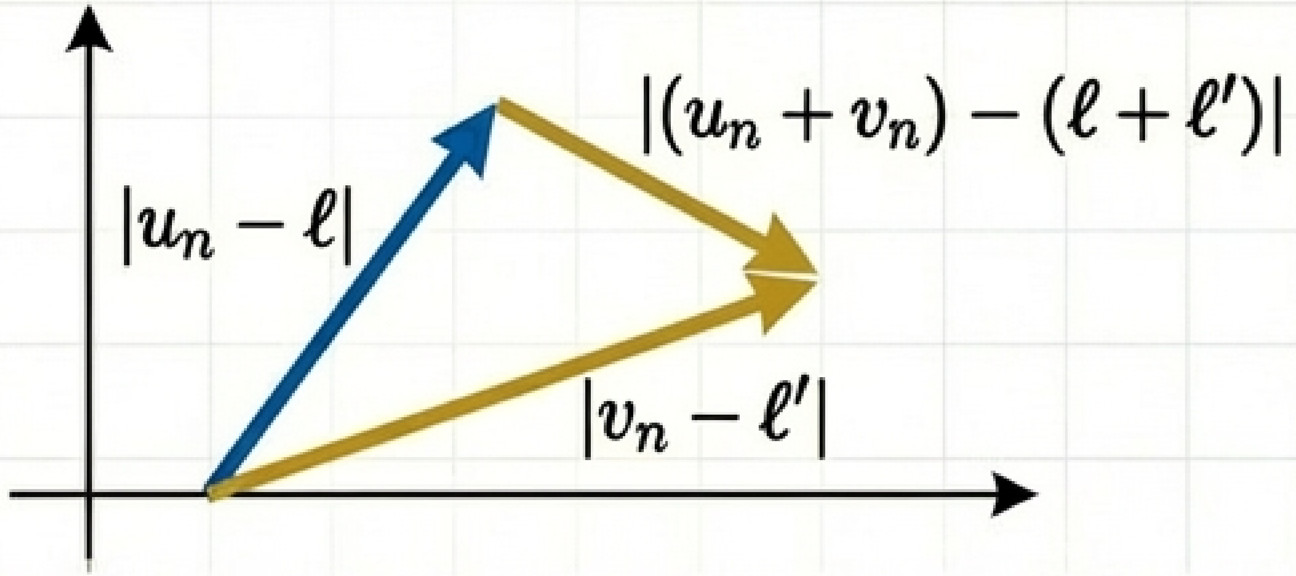
- **Somme :** $\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell'$
- **Produit :** $\lim(u_n v_n) = \ell\ell'$
- **Quotient :** $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$ (si $\ell' \neq 0$)
- **Scalaire :** $\lim(\lambda u_n) = \lambda\ell$

Visual Proof Sketch

L'Inégalité Triangulaire

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|$$

Si chaque terme est contrôlé par $\epsilon/2$, la somme est contrôlée par ϵ.

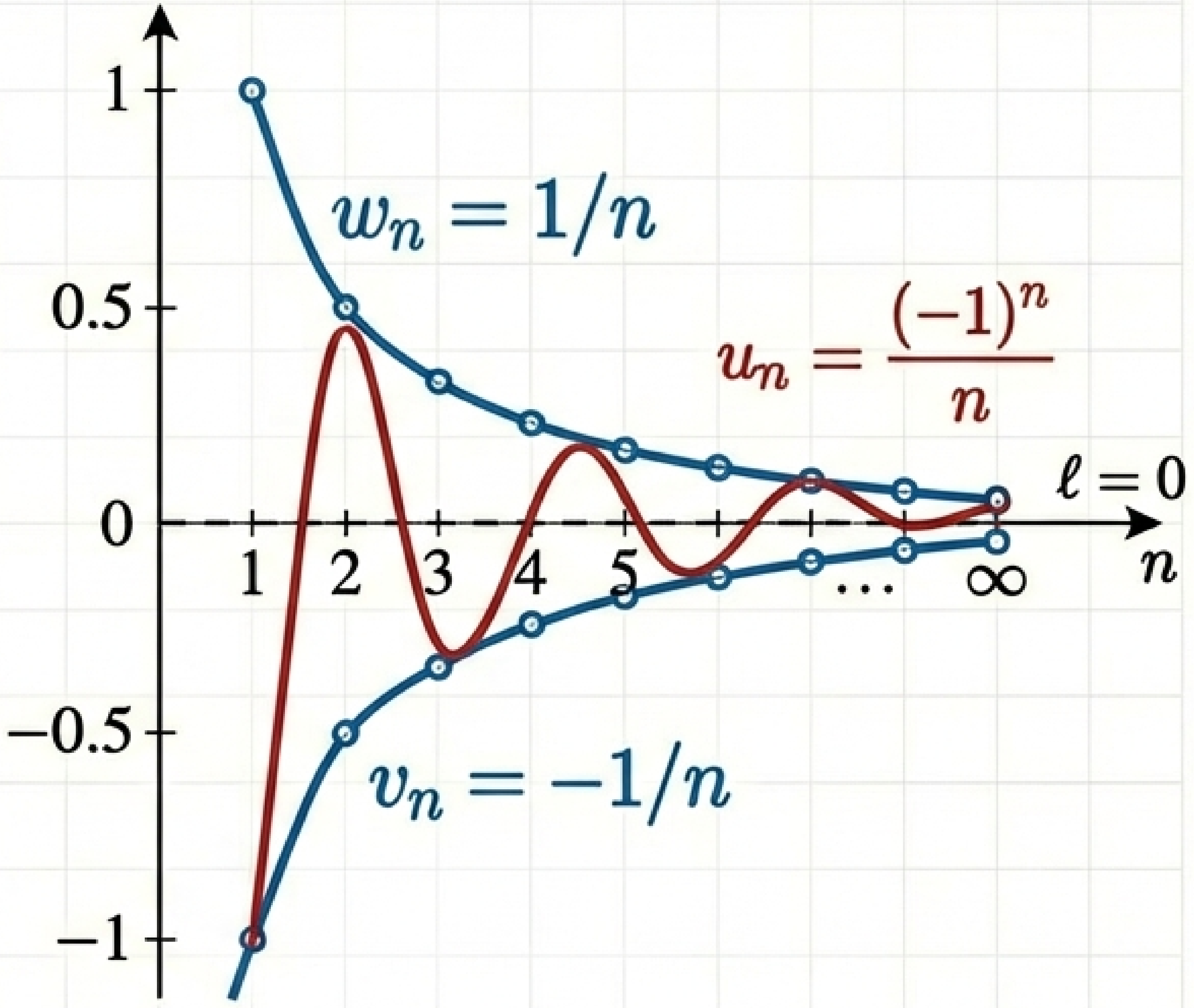


Théorème d'Encadrement (des Gendarmes)

Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout n, et si $\lim v_n = \lim w_n = \ell$, alors $\lim u_n = \ell$.

Exemple Clé : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

1. Encadrement : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$
2. Division par n : $-\dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$
3. Conclusion : Les gendarmes $\left(\pm\dfrac{1}{n}\right)$ tendent vers 0, donc $u_n \to 0$.



Divergence vers l'Infini

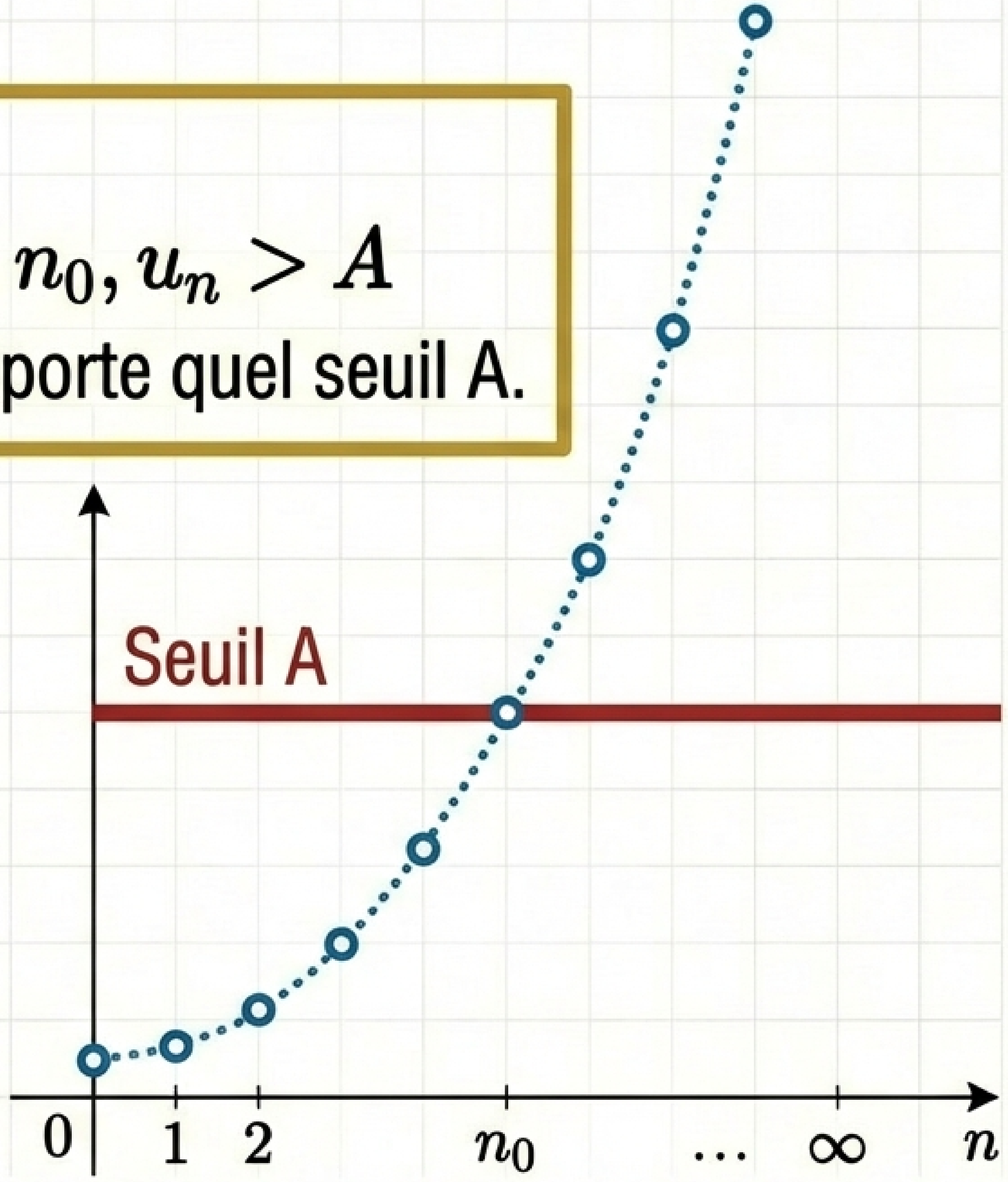
$+\infty$

$$\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, u_n > A$$

Traduction : La suite finit par dépasser n'importe quel seuil A.

$-\infty$

$$\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow u_n \in]-\infty, -A[$$



Suites de Référence

$$n^k \to +\infty, \sqrt{n} \to +\infty$$

Arithmétique de l'Infini

Règles Usuelles

- Somme : $\ell + (+\infty) = +\infty$
- Somme : $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- Produit : $\ell \times \infty$
  (Signe selon règle des signes)
- Inverse :
  $\lim u_n = \infty$
  $\Rightarrow \lim \frac{1}{u_n} = 0$

⚠️ Formes Indéterminées (FI)

Ne pas conclure hâtivement.
Nécessite une reformulation.

⚠️ 1. $\infty - \infty$

⚠️ 2. $0 \times \infty$

⚠️ 3. $\frac{\infty}{\infty}$

⚠️ 4. $\frac{0}{0}$

Lever l'Indétermination

Technique : Factorisation par le terme prépondérant (le plus fort)

Cas : $\infty - \infty$ (Exemple 8.2)

$$u_n = 2n - \frac{1}{n} + 1$$

Factorisation : $u_n = n\left(2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right)$

Limite : $(+\infty) \times (2 - 0 + 0) = +\infty$

Cas : $\frac{\infty}{\infty}$ (Exemple 8.3)

$$v_n = \frac{2n - 1/n}{n^2 - 1}$$

Factorisation :

$$v_n = \frac{n(2 - 1/n^2)}{n^2(1 - 1/n^2)} = \frac{1}{n} \times \frac{2 - 1/n^2}{1 - 1/n^2}$$

Limite : $0 \times \frac{2}{1} = 0$

Théorèmes de Comparaison

L'effet de poussée vers l'infini

Théorème

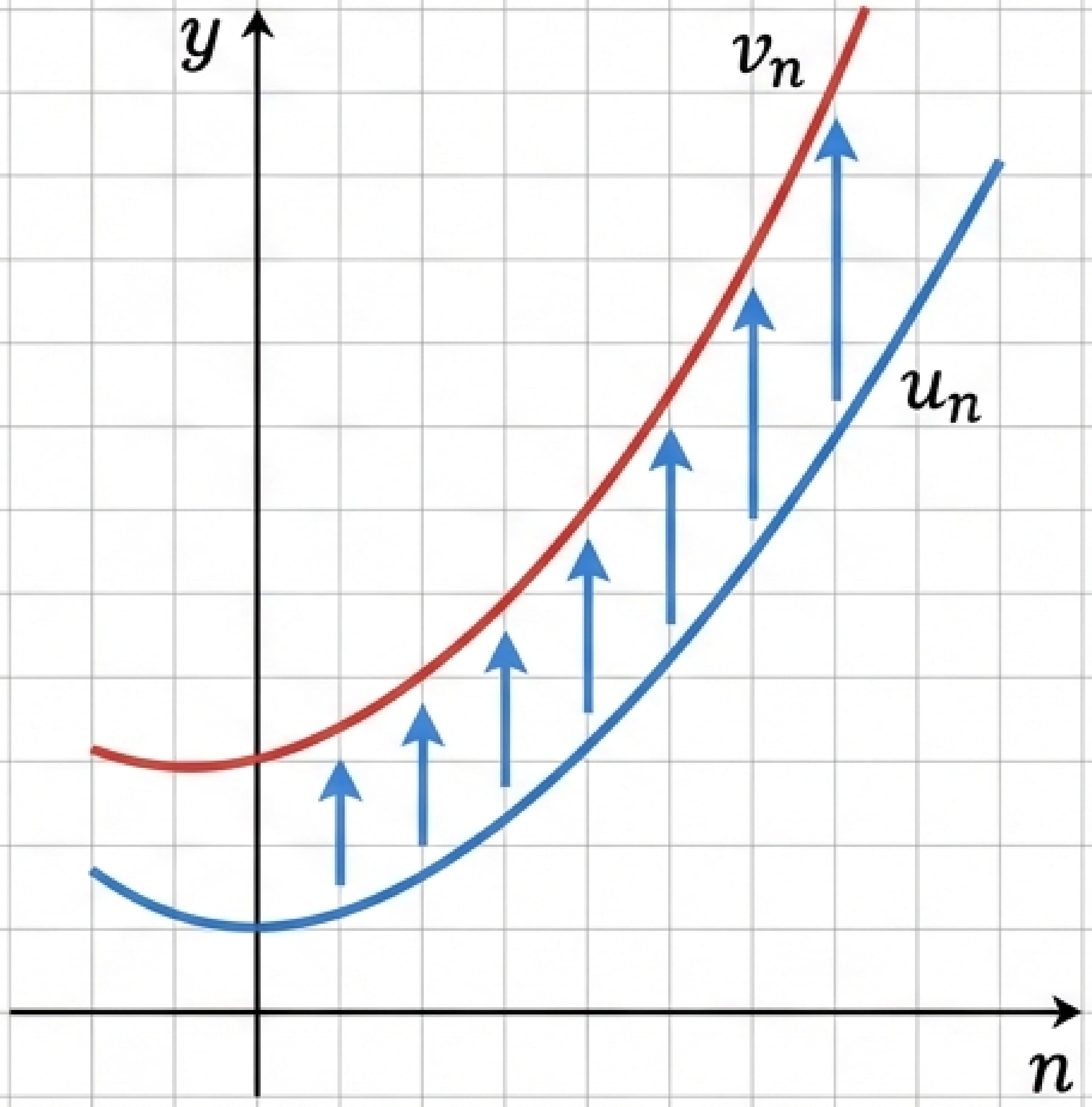
- Si $u_n \leq v_n$ et $\lim u_n = +\infty \;\Rightarrow\; \lim v_n = +\infty$
- Si $u_n \leq v_n$ et $\lim v_n = -\infty \;\Rightarrow\; \lim u_n = -\infty$

Exemple 8.8

Application : $u_n = n^2 + (-1)^n$

Minoration : $(-1)^n \geq -1 \;\Rightarrow\; u_n \geq n^2 - 1$

Conclusion : Comme $(n^2 - 1) \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$.



Les Suites Géométriques (q^n)

Disjonction des Cas (Selon q)

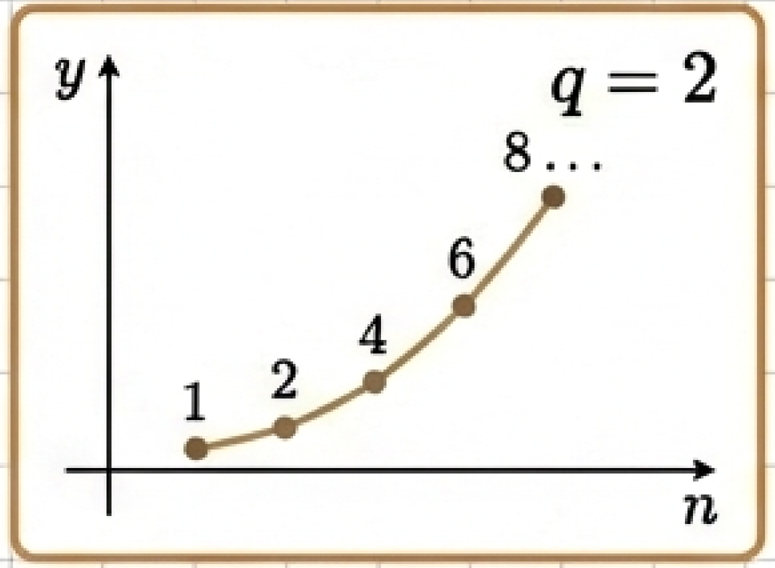
- $q > 1$: Diverge vers $+\infty$ (Bernoulli)
- $q = 1$: Constante (1)
- $|q| < 1$: Converge vers 0
- $q \leq -1$: Divergente (Oscillation sans limite)

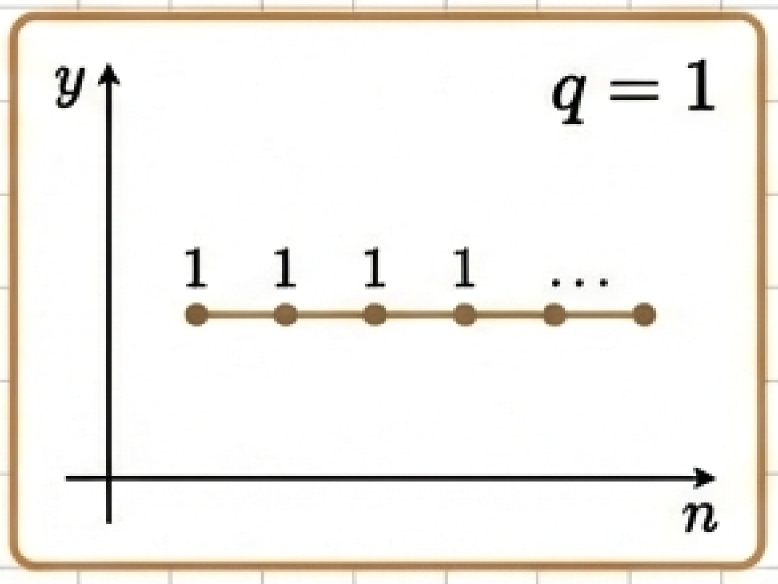
Somme Géométrique

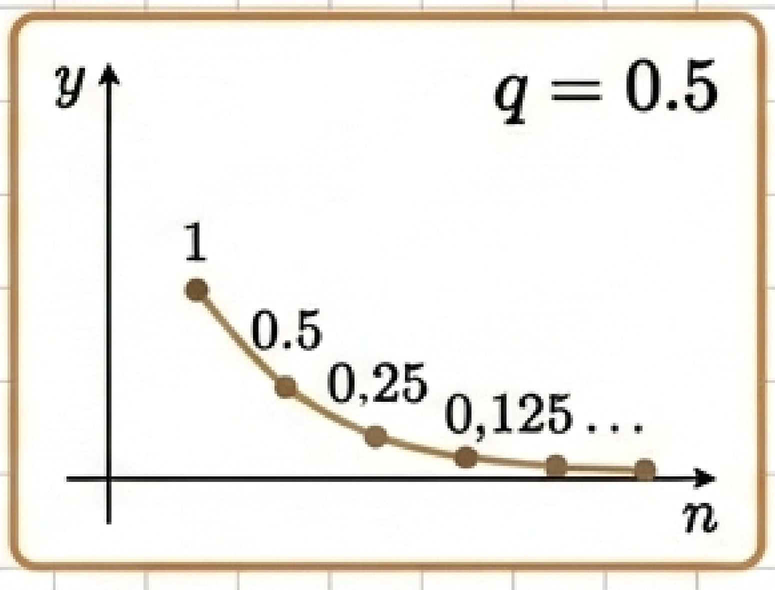
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

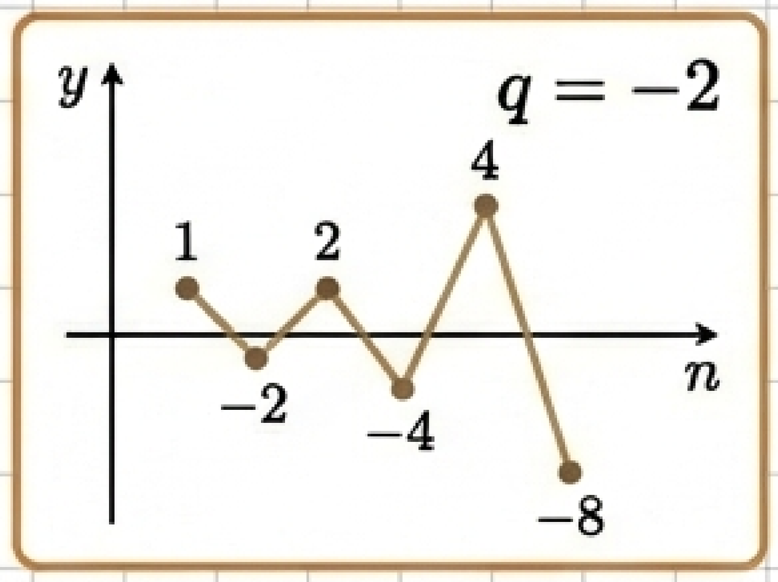
Si $|x| < 1$, somme infinie $= \dfrac{1}{1-x}$

Exemple : 0,6363... $= \dfrac{63}{100} \sum (10^{-2})^k = \dfrac{7}{11}$









NotebookLM

Limite et Monotonie

Théorème de la Convergence Monotone

1. Toute suite croissante et majorée est convergente.
2. Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Fondement

Axiome de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

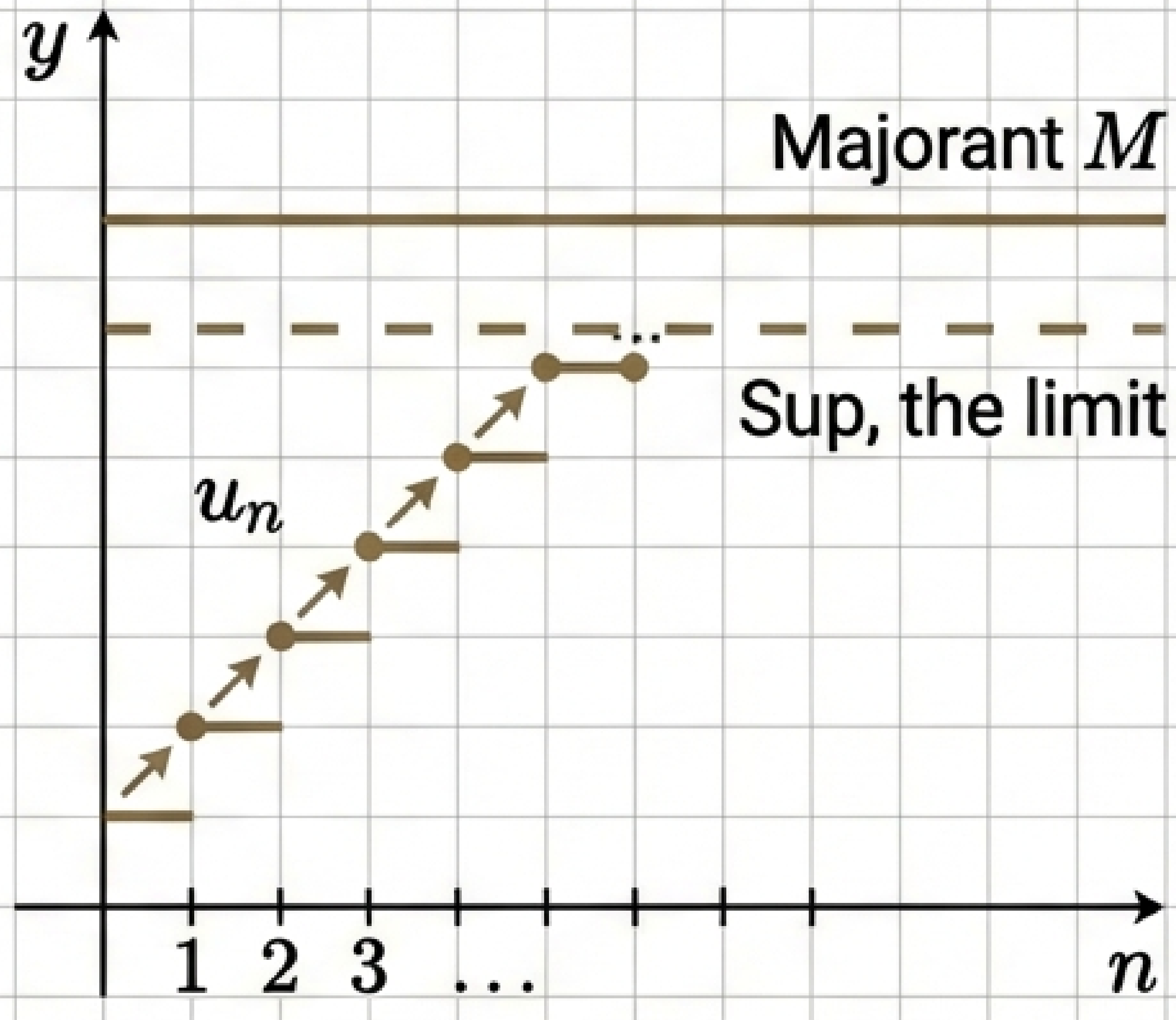
Contraste

Si croissante mais *non* majorée $\Rightarrow +\infty$.

Exemple

$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ (Suite majorée par 3 et croissante $\Rightarrow$ converge vers e).

Monotone Staircase



Suites Adjacentes

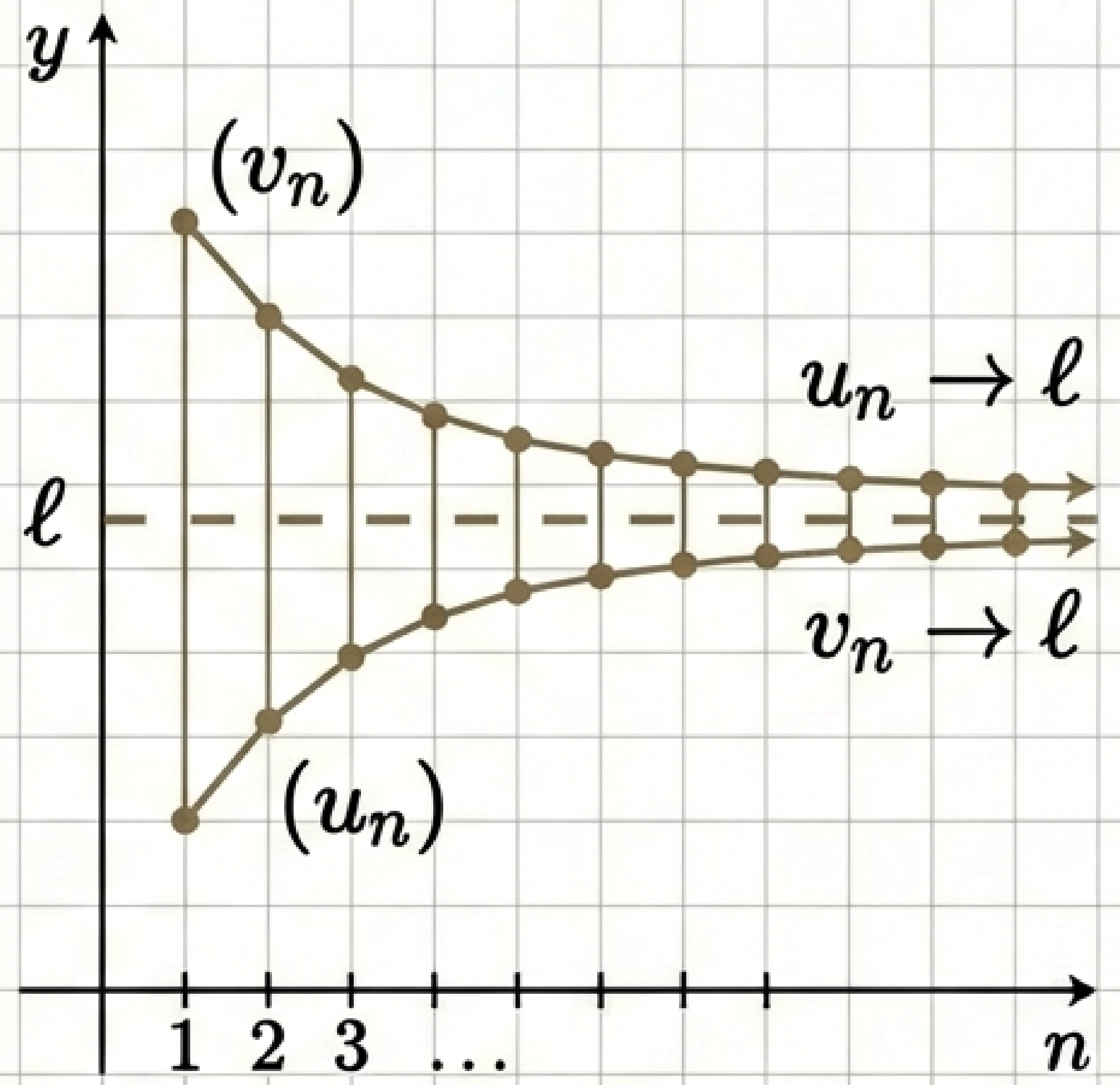
Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si :

- 1. (u_n) est croissante.
- 2. (v_n) est décroissante.
- 3. $\lim(v_n - u_n) = 0$.

Propriété Fondamentale

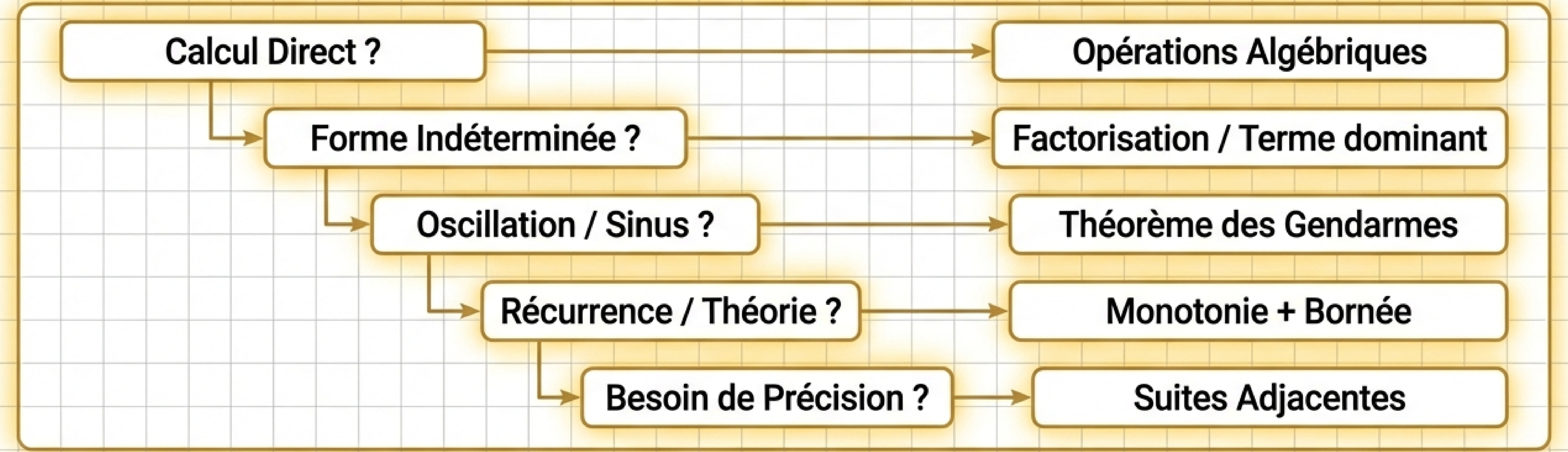
Elles convergent vers la **même** limite ℓ.

Encadrement précis : $\forall n,\ u_n \leq \ell \leq v_n$.



Synthèse Stratégique

Comment déterminer le comportement d’une suite ?



Algorithme d’Approximation (Python)

Approcher la limite commune par boucle `while` :

```
while (v − u) > epsilon: ...
    if u = − u > 0, else ...
```