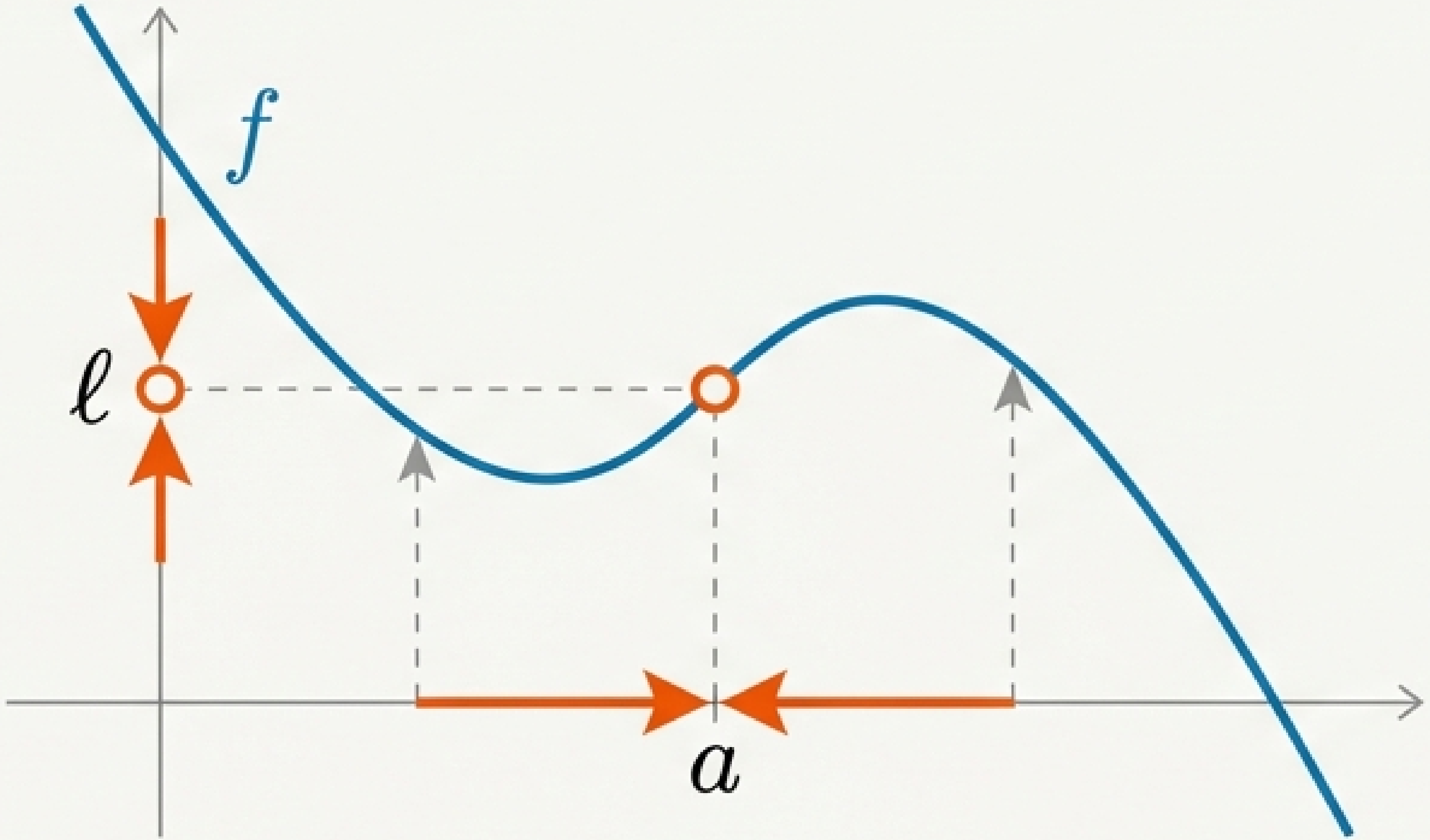
Chapitre 9 : Limite d'une fonction

De l'analyse locale au comportement global



La notion de limite d'une fonction généralise celle de limite d'une suite. Il s'agit d'étudier le comportement d'une fonction pour des valeurs voisines des bornes de son ensemble de définition (infini) ou en un point spécifique (étude locale).

Contexte : Héritage des suites (Chap. 8) • Pré-requis : Valeur absolue • Horizon : Continuité et Dérivabilité

Limite Finie en un Point : La Définition Formelle

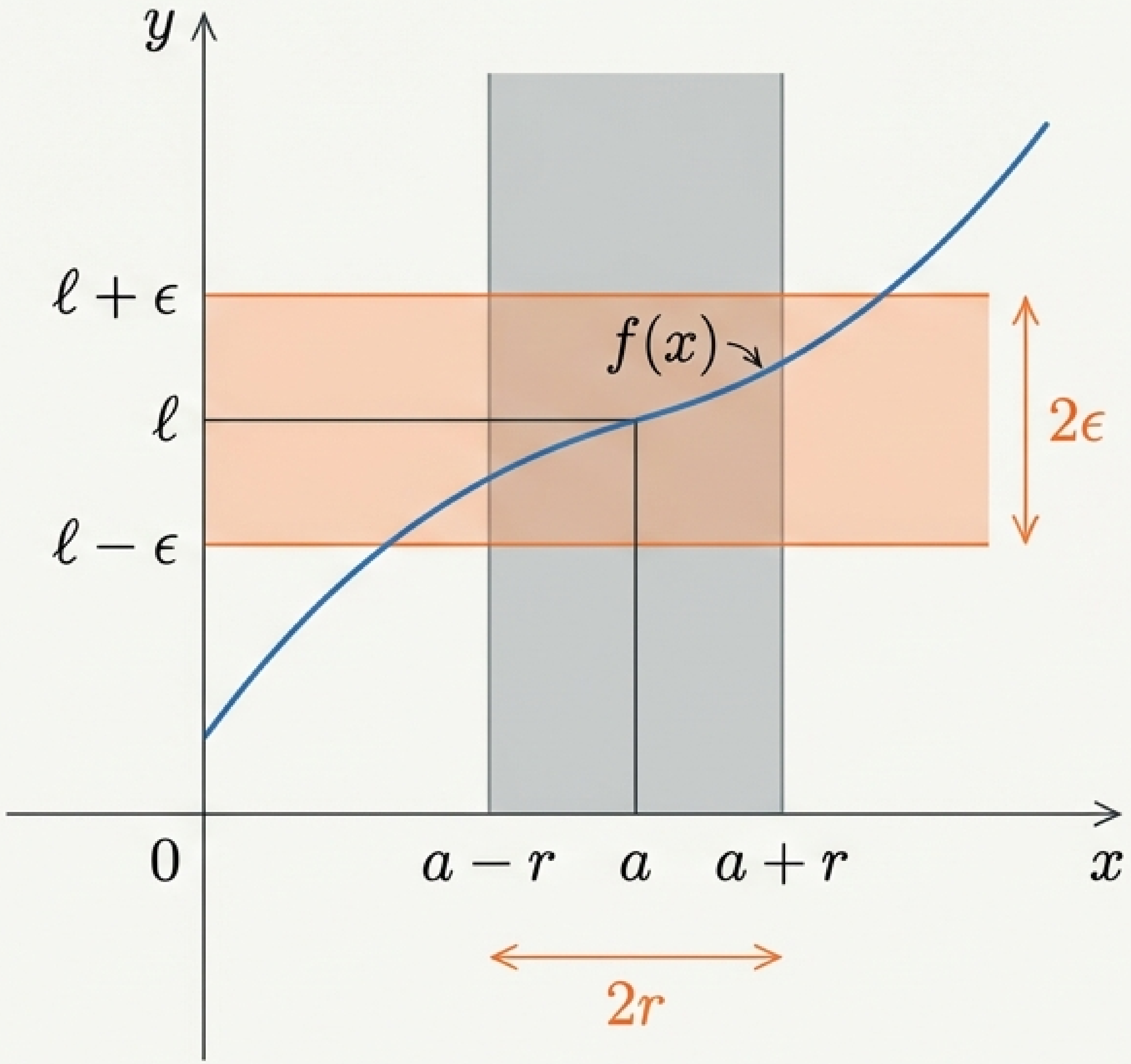
Notation : $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

Définition 9.2 ($\epsilon - \delta$)
Soient a et ℓ deux réels.

$$\forall \epsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in D,$$
$$|x - a| < r \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Interprétation : Pour tout couloir de tout largeur 2ϵ at ℓ, on peut trouver une fenêtre de largeur $2r$ autour de a telle que la courbe reste dans le couloir.

Proposition 9.1 : Si f est définie et a une limite en a, alors $\ell = f(a)$ (Continuité).



Limites Latérales et Unicité

Limite à droite $(x > a)$

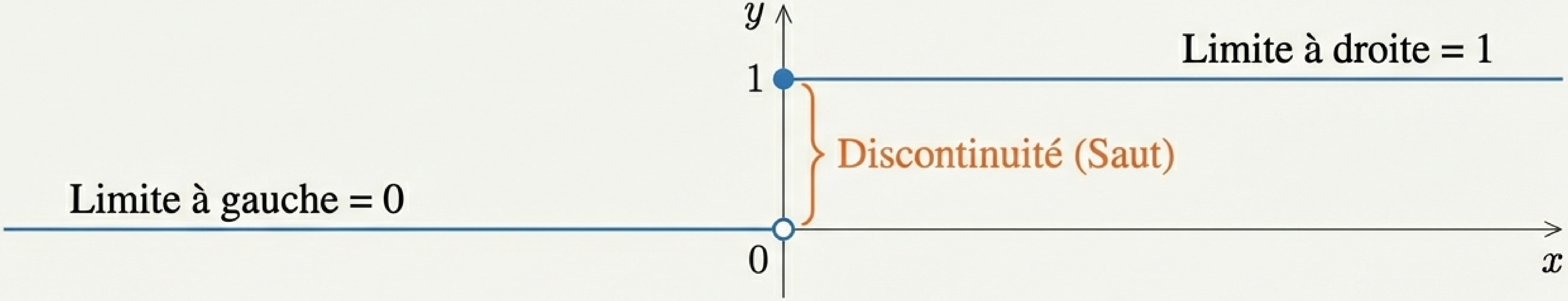
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$$

Limite à gauche $(x < a)$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$$

Proposition 9.4 : La limite existe si et seulement si la limite à gauche est égale à la limite à droite.

Contre-exemple : La Fonction Échelon (Exemple 9.2)



$u(t) = 1$ si $t \geq 0$, $\quad 0$ si $t < 0$

$1 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ Pas de limite en 0.

Théorèmes d'Inégalité et d'Encadrement

Quand le calcul échoue, la comparaison réussit.

Théorème 9.5 (Théorème des gendarmes)

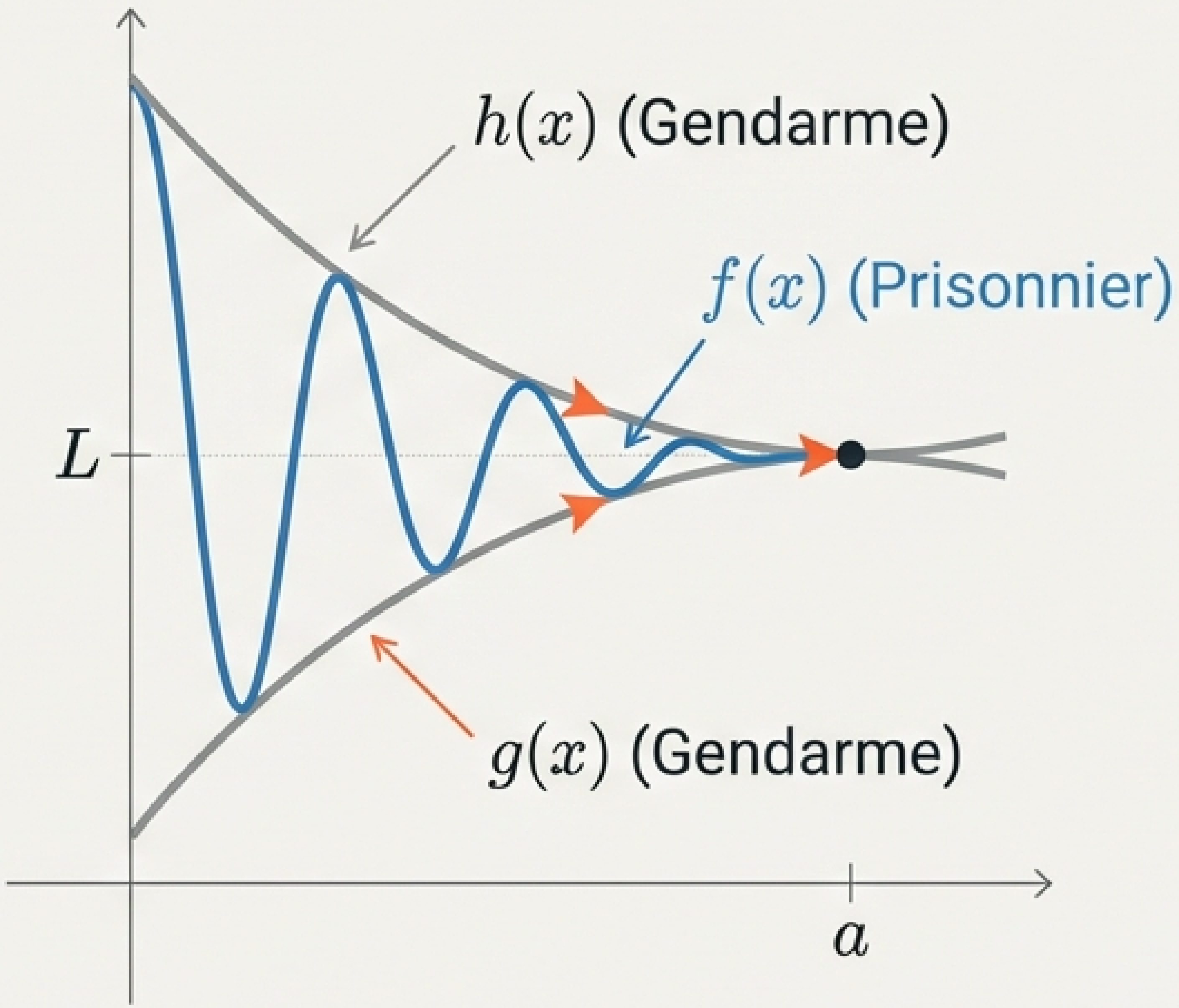
Hypothèses au voisinage de a :

1. $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
2. $\lim g(x) = \lim h(x) = \ell$

Conclusion : $\lim f(x) = \ell$

Corollaire 9.6 :

Si $|f(x) - \ell| \leq u(x)$ et $\lim u(x) = 0$,
alors $\lim f(x) = \ell$.



Comportement Global : Limite Finie en l'Infini

Définition :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

Interprétation :

$f(x)$ s'approche arbitrairement près de ℓ dès que x est assez grand.

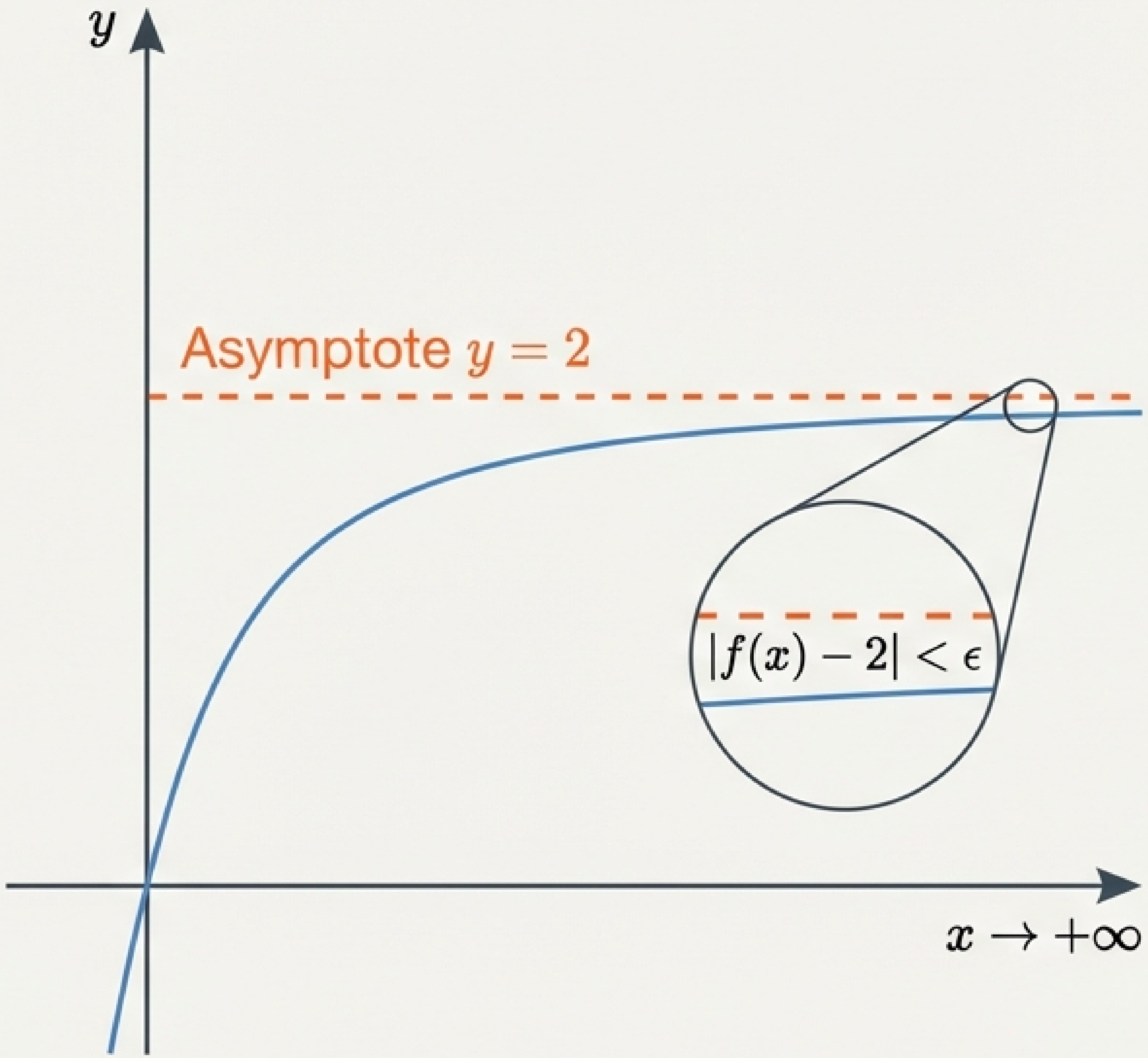
Concept Clé : Asymptote Horizontale

Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$, la droite $y = \ell$ est asymptote.

Exemple 9.3 :

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + x + 1}$$

Limite = 2



Limite Infinie en l'Infini

Divergence et Hiérarchie des Puissances

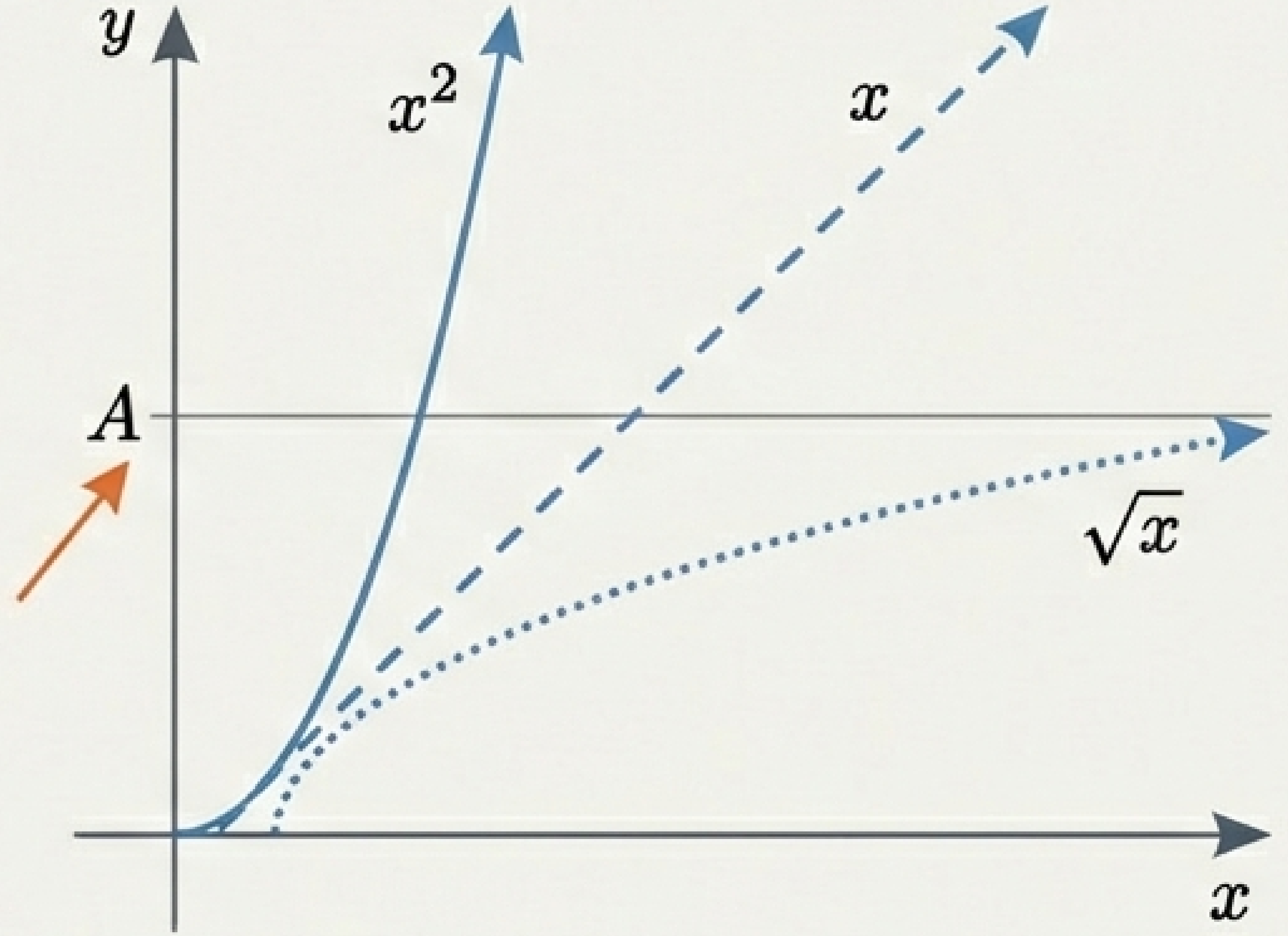
Définition : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\forall A > 0, \exists B, x > B \Rightarrow f(x) > A$$

Proposition 9.14 (Polynômes)

En $\pm\infty$, un polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré.

$$P(x) \approx a_n x^n$$



Limites de référence (Prop 9.13) :
Des vitesses de divergence différentes.

Théorèmes de Comparaison en l'Infini

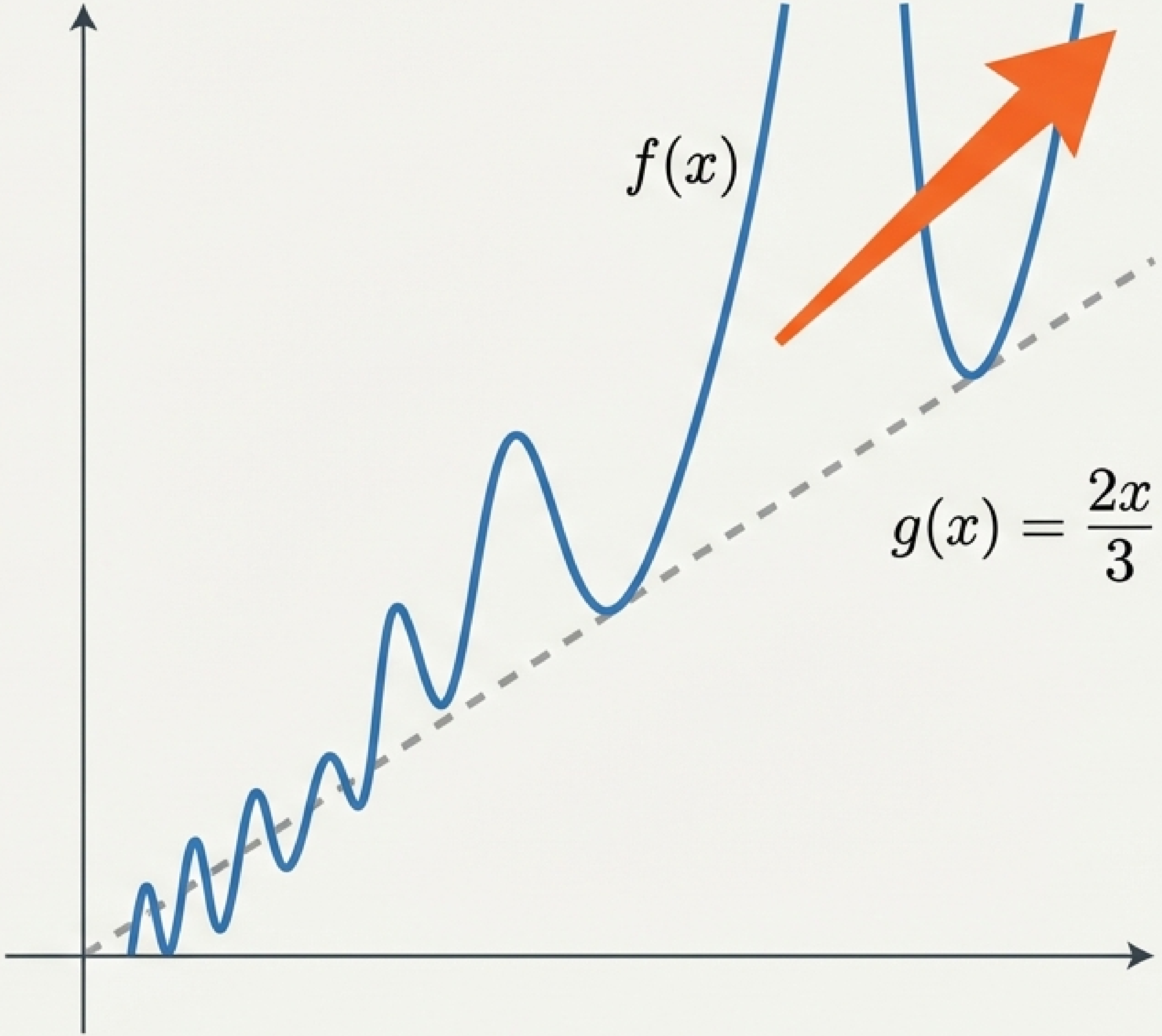
Théorème 9.15 (Vers $+\infty$)
Si $f(x) \geq g(x)$ et $\lim g(x) = +\infty$, alors $\lim f(x) = +\infty$.

Analogie : Si le plancher monte à l'infini, le plafond aussi.

Exemple 9.5 :

$$f(x) = \frac{2x}{2 - \sin(2x)}$$

Minoration : Le dénominateur est borné par 3 (car $-1 \leq \sin \leq 1$).
Donc $f(x) \geq \frac{2x}{3}$.

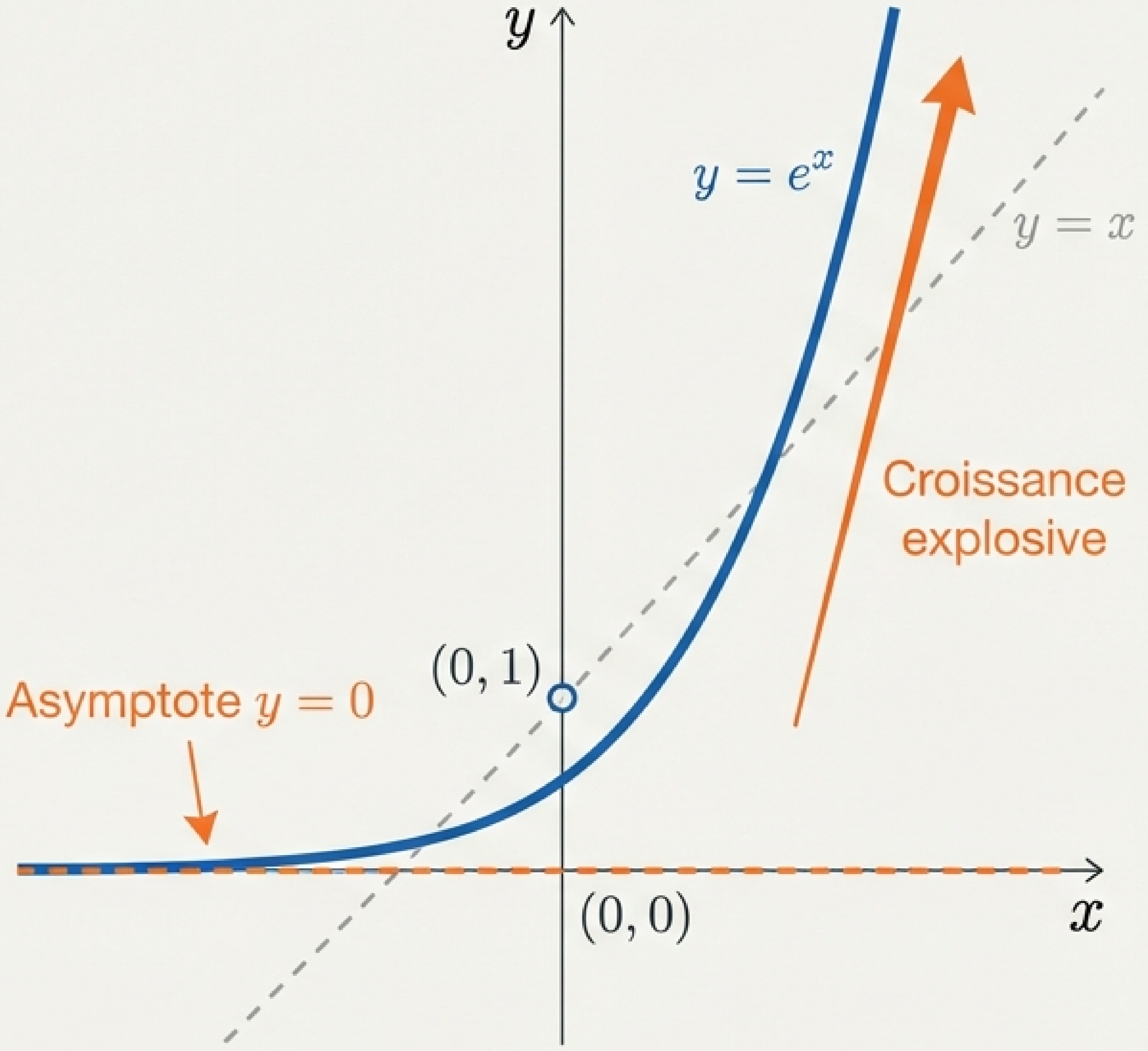


La Fonction Exponentielle : Croissance et Limites

Lemme 9.17 : $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x > x$

Proposition 9.18 : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

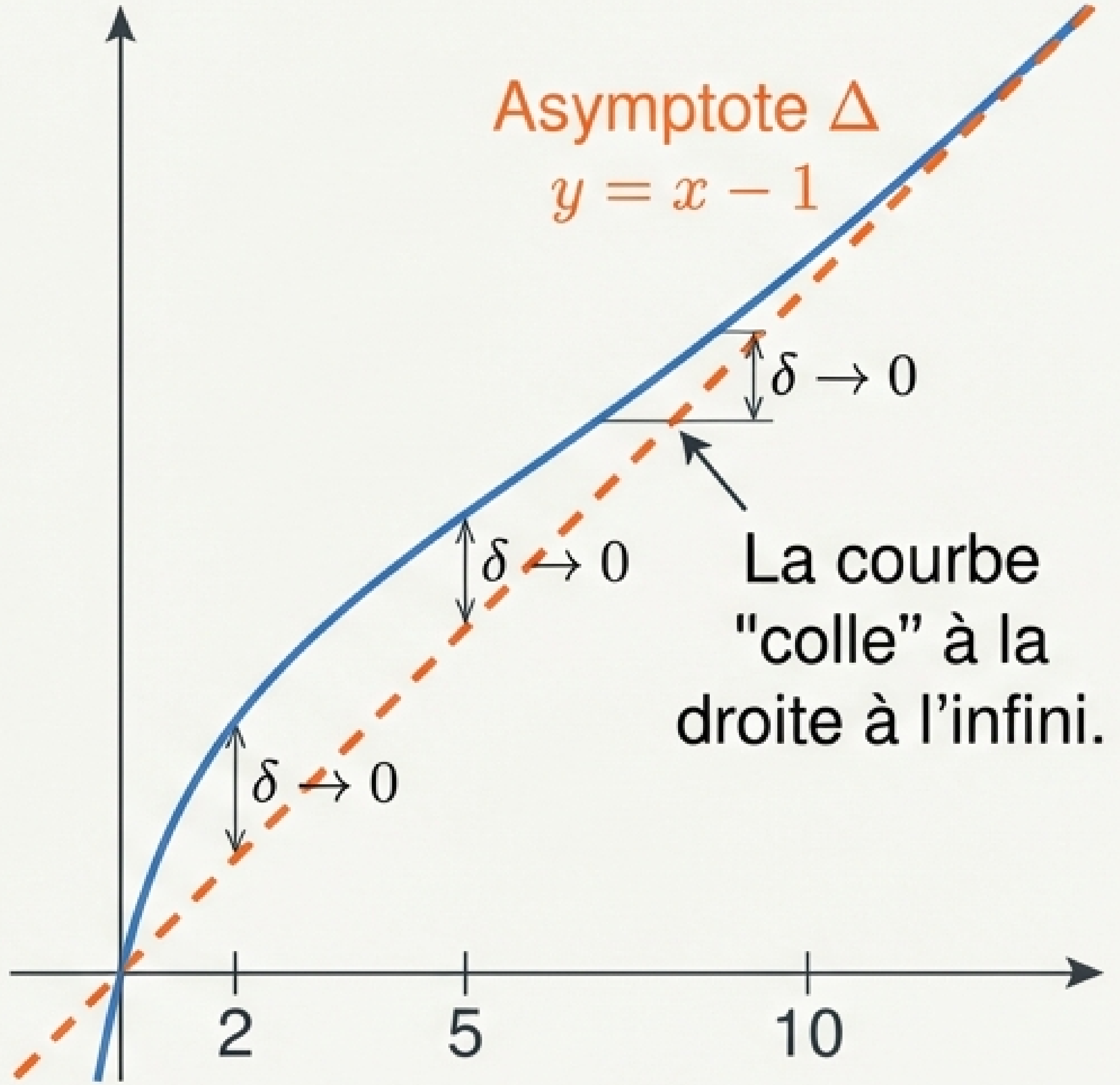
Proposition 9.19 : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$



Asymptote Oblique

Définition 9.9 : Une droite $\Delta : y = ax + b$ est asymptote oblique en $+\infty$ si :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$



Limite Infinie en un Point (Singularités)

Asymptotes Verticales

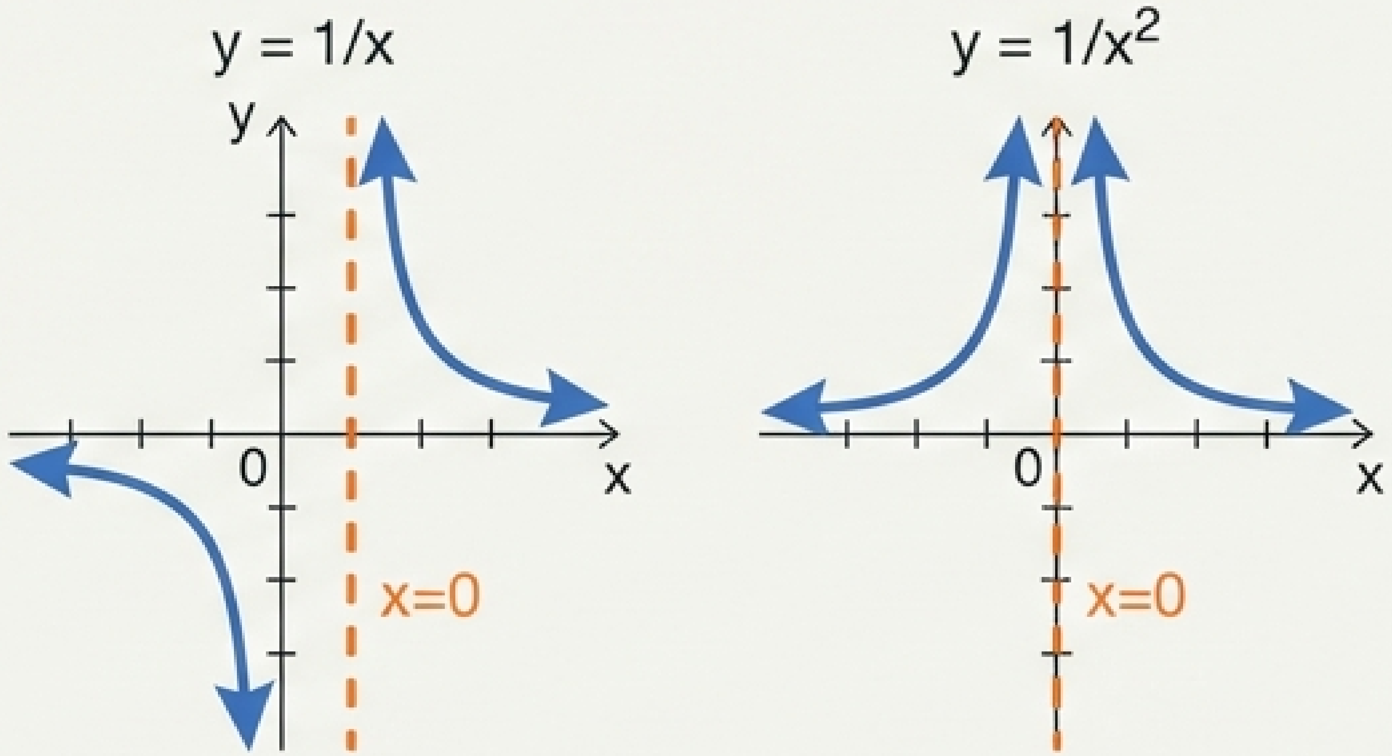
Définition 9.11 (Asymptote Verticale)

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, la droite $x = a$ est asymptote verticale.

Limites de Référence (Prop 9.20) :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \pm\infty \text{ (selon parité)}$$



Opérations Algébriques et Formes Indéterminées

Somme

Généralement sûr.
Exception : $(+\infty) + (-\infty)$

Produit

Règle des signes.
Exception : $0 \times \infty$

Quotient

Division standard.
Exception : $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$

⚠ ATTENTION : 4 Formes Indéterminées (FI)

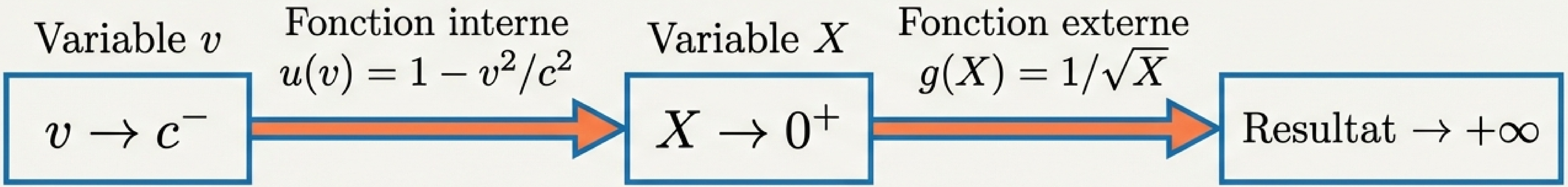
Le calcul direct est impossible. Il faut lever l'indétermination.

$\infty - \infty$ ⚠ $\quad 0 \times \infty$ ⚠ $\quad \dfrac{\infty}{\infty}$ ⚠ $\quad \dfrac{0}{0}$ ⚠

Limite de la Composée de Fonctions

Théorème de changement de variable (Th 9.21)

$$\text{Si } \lim_{x \to a} u(x) = L \text{ et } \lim_{X \to L} g(X) = K, \text{ alors } \lim_{x \to a} g\big(u(x)\big) = K.$$



Exemple 9.11 : Facteur de Lorentz en Relativité.

Lever l'Indétermination Algébrique

Méthode 1 : Factorisation (Quotients)

$$f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1} \text{ (FI ⚠ } \frac{\infty}{\infty}\text{)}$$

Step 1: Factoriser par le terme dominant (e^x)

$$= \frac{e^x(2 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})}$$

Step 2: Simplifier

$$= \frac{2 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \to \frac{2-0}{1+0} = 2$$

Méthode 2 : Quantité Conjuguée (Racines)

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{x^2 + 2} \text{ (FI ⚠ } \infty - \infty\text{)}$$

Step 1: Multiplier par le conjugué

$$\left(\frac{A - B}{1} \times \frac{A + B}{A + B} = \frac{A^2 - B^2}{A + B}\right)$$

Resultat : numérateur constant, dénominateur $\to \infty$. Limite = 0.

Croissances Comparées (Exponentielle vs Puissance)

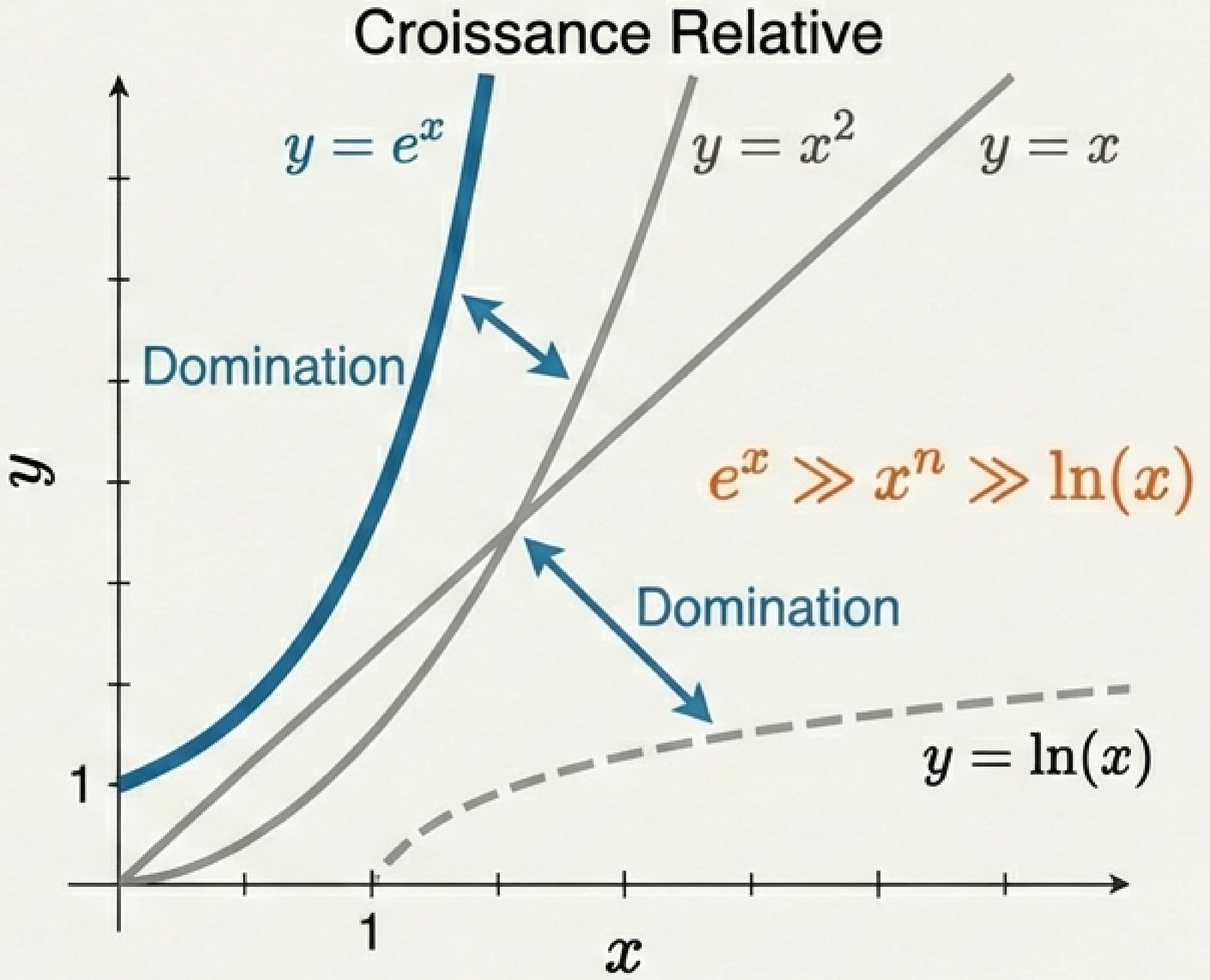
En l'infini, l'exponentielle l'emporte toujours sur la puissance.

Propositions 9.24 - 9.26

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$



NotebookLM

Synthèse et Limites Remarquables

La boîte à outils pour les examens

Taux d'accroissement

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\text{(Dérivée de } e^x \text{ en 0)}$$

Croissances Comparées

$$\frac{e^x}{x^n} \to +\infty$$

$$x^n e^x \to 0 \ (-\infty)$$

Singularités Zéro

$$\frac{1}{0^+} \to +\infty$$

$$\frac{1}{0^-} \to -\infty$$

Polynômes (∞)

$$\lim P(x) = \lim \text{(terme plus haut degré)}$$

Prochaine étape : Chapitre 10 - La Continuité.